

Zadatak 001 (Lidija, gimnazija)

Predmet visok 10 cm udaljen je 40 cm od tjemena konkavnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti 50 cm. Računski odredi položaj i veličinu slike.

Rješenje 001

$$y = 10 \text{ cm}, \quad x = 40 \text{ cm}, \quad r = 50 \text{ cm}, \quad x' = ?, \quad y' = ?$$

Jednadžba sfernog zrcala daje vezu između udaljenosti predmeta i slike od sfernog zrcala i fokalne daljine. Uzmemo li za ishodište tjeme zrcala i označimo li slovom x udaljenost predmeta od tjemena, slovom x' udaljenost slike od tjemena i slovom f udaljenost fokusa od tjemena, vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}.$$

Povećanje zrcala γ zovemo omjer između veličine slike y' i veličine predmeta y :

$$\gamma = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}.$$

Fokalnu daljinu izračunamo iz izraza:

$$f = \frac{r}{2} = \frac{50 \text{ cm}}{2} = 25 \text{ cm}.$$

Sada je:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{x-f}{f \cdot x} \Rightarrow x' = \frac{f \cdot x}{x-f} = \frac{25 \text{ cm} \cdot 40 \text{ cm}}{40 \text{ cm} - 25 \text{ cm}} = \frac{1000 \text{ cm}^2}{15 \text{ cm}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [\text{kratimo s 5}] \Rightarrow x' = 66\frac{2}{3} \text{ cm}.$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} \Rightarrow y' = -y \cdot \frac{x'}{x} = -10 \text{ cm} \cdot \frac{66\frac{2}{3} \text{ cm}}{40 \text{ cm}} = -\frac{200}{3} \text{ cm} = -66\frac{2}{3} \text{ cm}.$$

Slika je realna, povećana i obrnuta.

Vježba 001

Predmet visok 10 cm udaljen je 50 cm od tjemena konkavnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti 20 cm. Računski odredi položaj i veličinu slike.

Rezultat: $x' = 12.5 \text{ cm}, \quad y' = -2.5 \text{ cm}.$

Zadatak 002 (Lidija, gimnazija)

Predmet visok 10 cm nalazi se 30 cm ispred konveksnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti 50 cm. Računski odredi položaj i veličinu slike.

Rješenje 002

Jednadžba sfernog zrcala daje vezu između udaljenosti predmeta i slike od sfernog zrcala i fokalne daljine. Uzmemo li za ishodište tjeme zrcala i označimo li slovom x udaljenost predmeta od tjemena, slovom x' udaljenost slike od tjemena i slovom f udaljenost fokusa od tjemena, vrijedi jednadžba:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x'} = \frac{1}{f}.$$

Udaljenost virtualnih slika i fokalna daljina konveksnog zrcala imaju negativan predznak.

$$y = 10 \text{ cm}, \quad x = 30 \text{ cm}, \quad r = 50 \text{ cm}, \quad x' = ?, \quad y' = ?$$

Povećanje zrcala γ zovemo omjer između veličine slike y' i veličine predmeta y :

$$\gamma = \frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x}.$$

Fokalnu daljinu izračunamo iz izraza:

$$f = -\frac{r}{2} = -\frac{50 \text{ cm}}{2} = -25 \text{ cm}. \text{ Predznak minus!}$$

Sada je:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{x'} &= \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x'} = \frac{x-f}{f \cdot x} \Rightarrow x' = \frac{f \cdot x}{x-f} = \frac{-25 \text{ cm} \cdot 30 \text{ cm}}{30 \text{ cm} - (-25 \text{ cm})} = \frac{-750 \text{ cm}^2}{55 \text{ cm}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow [\text{kratimo s } 5] \Rightarrow x' = -13\frac{7}{11} \text{ cm}. \end{aligned}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{x'}{x} \Rightarrow y' = -y \cdot \frac{x'}{x} = -10 \text{ cm} \cdot \frac{-13\frac{7}{11} \text{ cm}}{30 \text{ cm}} = 10 \text{ cm} \cdot \frac{150}{330} = \frac{50}{11} \text{ cm} = 4\frac{6}{11} \text{ cm}.$$

Slika je virtualna, umanjena i uspravna.

Vježba 002

Predmet visok 10 cm nalazi se 30 cm ispred konveksnog sfernog zrcala polumjera zakrivljenosti 50 cm. Računski odredi položaj i veličinu slike.

Rezultat: $x' = 12.5 \text{ cm}, \quad y' = -2.5 \text{ cm}.$

Zadatak 003 (Ivan, elektrotehnička škola)

Odredi temperaturu peći ako je poznato da otvor površine 7 cm^2 emitira u 1 sekundi 45.3 J. Pretpostavimo da je zračenje približno jednako zračenju apsolutno crnog tijela.

Rješenje 003

$$S = 7 \text{ cm}^2 = 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2, \quad t = 1 \text{ s}, \quad W = 45.3 \text{ J}, \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \text{ W/m}^2\text{K}^4, \quad T = ?$$

Snaga je omjer rada u jedinici vremena. Toplinska energija koju zrači površina apsolutno crnog tijela u jednoj sekundi određuje se Stefan-Boltzmannovim [Stefan-Bolcman] zakonom:

$$P = \sigma \cdot S \cdot T^4,$$

gdje je P snaga zračenja, T temperatura tijela izražena u kelvinima, S površina tijela, a σ Stefan-Boltzmannova konstanta. Snaga zračenja je

$$P = 45.3 \text{ W}.$$

$$T^4 = \frac{P}{\sigma \cdot S} \Rightarrow T = \sqrt[4]{\frac{P}{\sigma \cdot S}} = \sqrt[4]{\frac{45.3 \text{ W}}{5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \cdot \text{K}^4} \cdot 7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}} = 1033.6 \text{ K}.$$

Temperatura je 1 033.6 K.

Vježba 003

Odredi temperaturu peći ako je poznato da otvor površine 4 cm^2 emitira u 1 sekundi 50 J. Pretpostavimo da je zračenje približno jednako zračenju apsolutno crnog tijela.

Rezultat: 1 218.5 K.

Zadatak 004 (Toni, elektrotehnička škola)

Koliki je indeks loma sredstva ako svjetlosni signal prijeđe u tom sredstvu udaljenost 1.5 m za 0.0075 μs ?

Rješenje 004

$$s = 1.5 \text{ m}, \quad t = 0.0075 \mu\text{s} = 7.5 \cdot 10^{-9} \text{ s}, \quad c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad n = ?$$

Apsolutni indeks loma nekog prozirnog sredstva definira se:

$$n = \frac{c}{v},$$

gdje je c brzina svjetlosti u vakuumu, a v brzina svjetlosti u sredstvu. Brzina svjetlosti u sredstvu je:

$$v = \frac{s}{t}$$

pa se indeks loma jednostavno izračuna:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{s}{t}} = \frac{c \cdot t}{s} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 7.5 \cdot 10^{-9} s}{1.5 m} = 1.5.$$

Vježba 004

Koliki je indeks loma sredstva ako svjetlosni signal prijede u tom sredstvu udaljenost 3 m za 0.0075 μ s?

Rezultat: 0.75.

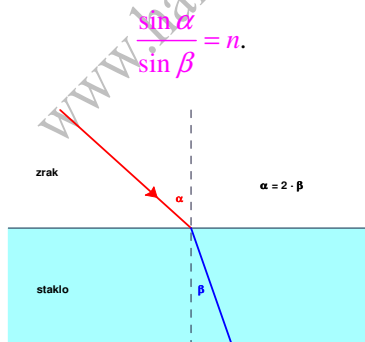
Zadatak 005 (Ines, gimnazija)

Zraka svjetlosti se lomi pri prijelazu iz zraka u staklo indeksa loma 1.6 tako da je kut upada jednak dvostrukom kutu loma. Odredite upadni kut!

Rješenje 005

$$n = 1.6, \quad \alpha = 2 \cdot \beta, \quad \alpha = ?$$

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravni. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednačbom:



Zato je:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \\ \alpha = 2 \cdot \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} = n \Rightarrow [\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x] \Rightarrow \frac{2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{\sin \beta} = n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \cos \beta = n \quad | :2 \Rightarrow \cos \beta = \frac{n}{2} \Rightarrow \cos \beta = \frac{1.6}{2} \Rightarrow \cos \beta = 0.8 \Rightarrow \beta = 36.86989765^{\circ} \Rightarrow \beta = 36^{\circ} 52' 12''.$$

$$\alpha = 2 \cdot \beta = 2 \cdot 36^{\circ} 52' 12'' = 72^{\circ} 104' 24'' = [60' = 1^{\circ}] = 73^{\circ} 44' 24''.$$

Vježba 005

Zraka svjetlosti se lomi pri prijelazu iz zraka u staklo indeksa loma 1.6 tako da je kut loma jednak 30°. Odredite upadni kut!

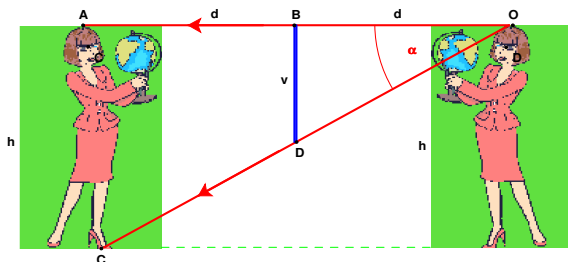
Rezultat: 53° 7' 48".

Zadatak 006 (Ines, gimnazija)

Zrcalo je obješeno na vertikalni zid. Kolika je minimalna visina zrcala da se u njemu može potpuno ogledati čovjek visine 1.72 m?

Rješenje 006

$h = 1.72 \text{ m}$, $v = ?$
1. inačica



Ako je udaljenost čovjeka do zrcala jednaka d , tada je njegova udaljenost do slike $2d$. Čovjek u zrcalu mora vidjeti prste na nogama. Kut pod kojim sebe vidi u zrcalu je takav da je $\text{tg } \alpha = \frac{h}{2d}$. Ako je visina zrcala v ,

onda je također $\text{tg } \alpha = \frac{v}{d}$ pa je tada

$$\frac{v}{d} = \frac{h}{2d} \cdot d \Rightarrow v = \frac{h}{2} = \frac{1.72 \text{ m}}{2} = 0.86 \text{ m}.$$

2. inačica

Trokuti OBD i OAC slični su (imaju jednake kutove) pa vrijedi razmjer:

$$|BD| : |BO| = |AC| : |AO| \Rightarrow v : d = h : 2d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \frac{d \cdot h}{2d} = \frac{h}{2} = \frac{1.72 \text{ m}}{2} = 0.86 \text{ m}.$$

Vježba 006

Zrcalo je obješeno na vertikalni zid. Kolika je minimalna visina zrcala da se u njemu može potpuno ogledati čovjek visine 1.88 m?

Rezultat: 0.94 m.

Zadatak 007 (Kasper, gimnazija)

Koliki je indeks loma sredstva ako svjetlosni signal prijeđe u tom sredstvu udaljenost 1.5 m za 0.0075 μs ?

Rješenje 007

$s = 1.5 \text{ m}$, $t = 0.0075 \mu\text{s} = 7.5 \cdot 10^{-3} \mu\text{s} = 7.5 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$, $n = ?$

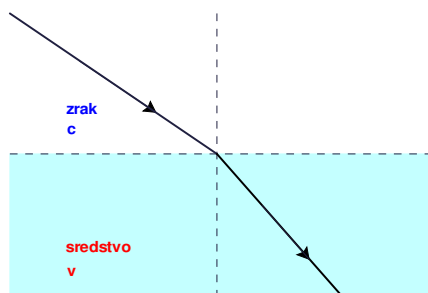
Kada svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, vrijedi

$$n_{2/1} = \frac{v_1}{v_2},$$

gdje su v_1 i v_2 brzine svjetlosti u prvom i drugom sredstvu, a $n_{2/1}$ relativni indeks loma drugog sredstva prema prvom sredstvu. Ako je prvo sredstvo zrak, označavamo relativni indeks loma sa n i zovemo ga indeksom loma tog sredstva:

$$n = \frac{c}{v},$$

c je brzina svjetlosti u vakuumu (zraku), v brzina svjetlosti u drugom sredstvu.



Indeks loma je:

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\frac{s}{t}} = \frac{c \cdot t}{s} = \frac{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \cdot 7.5 \cdot 10^{-9} s}{1.5 m} = 1.5.$$

Vježba 007

Koliki je indeks loma sredstva ako svjetlosni signal prijeđe u tom sredstvu udaljenost 1.5 m za 0.015 μ s?

Rezultat: 3.

Zadatak 008 (Petra, gimnazija)

Zraka svjetlosti upada pod kutom 75° iz zraka na površinu ulja, lomi se, a zatim iz ulja, lomeći se, ulazi u anilin. Ako je ukupna devijacija zrake (kut između smjera upadne zrake i zrake u anilinu) 37° , kolika je brzina svjetlosti u anilinu? (Indeks loma ulja manji je od indeksa loma anilina.)

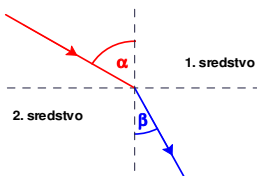
Rješenje 008

$$\alpha = 75^\circ, \quad c_1 = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad \delta = 37^\circ, \quad c_3 = ?$$

Kad svjetlost prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Upadni kut α i kut loma β vezani su jednadžbom:

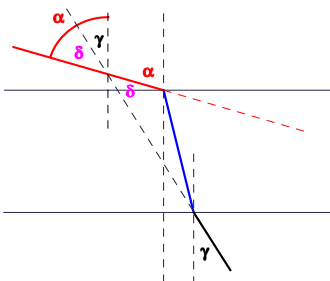
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2},$$

gdje su c_1 i c_2 brzine svjetlosti u prvom i drugom sredstvu.



Ako je α kut upada zrake svjetlosti iz zraka na površinu ulja, a δ kut devijacije (kut između smjera upadne zrake i zrake u anilinu), onda je kut loma γ zrake svjetlosti u anilinu jednak:

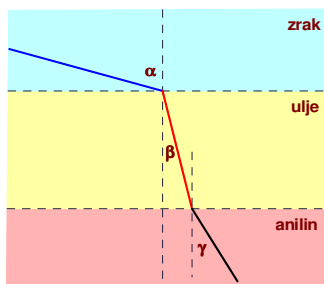
$$\gamma = \alpha - \delta = 75^\circ - 37^\circ = 38^\circ.$$



Označimo li brzine svjetlosti u zraku, ulju i anilinu sa c_1 , c_2 , c_3 imamo:

$$\left. \begin{aligned} \frac{c_1}{c_2} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \\ \frac{c_2}{c_3} &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \end{aligned} \right\} \text{ i } \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \Rightarrow \frac{c_1}{c_3} = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_3 = c_1 \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\sin 38^\circ}{\sin 75^\circ} = 1.91 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Vježba 008

Zraka svjetlosti upada pod kutom 70° iz zraka na površinu sredstva A, lomi se, a zatim iz sredstva A, lomeći se, ulazi u sredstvo B. Ako je ukupna devijacija zrake (kut između smjera upadne zrake i zrake u sredstvu B) 39° , kolika je brzina svjetlosti u sredstvu B? (Indeks loma sredstva A manji je od indeksa loma sredstva B.)

Rezultat: $1.64 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

Zadatak 009 (Zoran, gimnazija)

Monokromatski izvor snage 100 W emitira zelenu svjetlost valne duljine 500 nm. Koliko fotona u sekundi izlazi iz izvora?

Rješenje 009

$$P = 100 \text{ W}, \quad \lambda = 500 \text{ nm} = 500 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \quad t = 1 \text{ s}, \quad h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js},$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad N = ?$$

$$\left. \begin{aligned} W &= P \cdot t \\ E &= h \cdot \frac{c}{\lambda} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Broj fotona: } N = \frac{W}{E} = \frac{P \cdot t}{h \cdot \frac{c}{\lambda}} = \frac{P \cdot t \cdot \lambda}{h \cdot c} = \frac{100 \text{ W} \cdot 1 \text{ s} \cdot 5 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \text{ m}} = 2.5 \cdot 10^{20}$$

Vježba 009

Monokromatski izvor snage 200 W emitira zelenu svjetlost valne duljine 500 nm. Koliko fotona u sekundi izlazi iz izvora?

Rezultat: $5 \cdot 10^{20}$.

Zadatak 010 (Ivana, hotelijerska škola)

Brzina longitudinalnih valova u Zemljinom omotaču je 13.8 km/s, a u Zemljinoj jezgri 8.8 km/s. Odredite kut loma vala, koji upada iz omotača na granicu omotač – jezgra pod kutom 45° . Omotač obavića Zemljinu jezgru.

- A. 26.8^0 B. 63.2^0 C. 53.6^0 D. 15.2^0 E. nema loma valova

Rješenje 010

$$v_1 = 13.8 \text{ km/s}, \quad v_2 = 8.8 \text{ km/s}, \quad \alpha = 45^\circ, \quad \beta = ?$$

Kad val prelazi iz jednog optičkog sredstva u drugo, mijenja smjer. Upadna zraka, okomica na granicu sredstva u upadnoj točki i lomljena zraka leže u istoj ravnini. Upadni kut α i kut loma β vezani su

jednadžbom:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

gdje su v_1 i v_2 brzine vala u prvom i drugom sredstvu. Kut loma vala iznosi:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2} \Rightarrow \sin \beta = \frac{v_2 \cdot \sin \alpha}{v_1} \Rightarrow \sin \beta = \frac{8.8 \frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \sin 45^\circ}{13.8 \frac{\text{km}}{\text{s}}} \Rightarrow \sin \beta = 0.450908672 \Rightarrow \beta = 26.8^\circ.$$

Odgovor pod A.

Vježba 010

Brzina longitudinalnih valova u Zemljinom omotaču je 13.8 km/s, a u Zemljinoj jezgri 8.8 km/s. Odredite kut loma vala, koji upada iz omotača na granicu omotač – jezgra pod kutom 30° . Omotač obavlja Zemljinu jezgru.

Rezultat: $\beta = 18.59^\circ$.

Zadatak 011 (Mira, gimnazija)

Dalekozor ima objektiv fokalne daljine 150 cm i okular fokalne daljine 10 cm. Pod kojim ćemo vidnim kutom vidjeti Mjesec za vrijeme uštapa ako ga prostim okom vidimo pod kutom $31'$?

Rješenje 011

$$f_1 = 150 \text{ cm}, \quad f_2 = 10 \text{ cm}, \quad \alpha_2 = 31', \quad \alpha_1 = ?$$



Ukupno povećanje M dalekozora jednako je omjeru fokalne daljine objektiv f_1 i okulara f_2 , dakle

$$M = \frac{f_1}{f_2}.$$

Za povećanje vrijedi

$$M = \frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2},$$

gdje su α_1 i α_2 kutovi pod kojima vidimo predmet kroz dalekozor i bez njega.

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{f_1 \cdot \alpha_2}{f_2} = \frac{150 \text{ cm} \cdot 31'}{10 \text{ cm}} = 465' = [1^0 = 60'] = 7 \cdot 60' + 45' = 7^0 45'.$$

Vježba 011

Dalekozor ima objektiv fokalne daljine 150 cm i okular fokalne daljine 10 cm. Pod kojim ćemo vidnim kutom vidjeti Mjesec za vrijeme uštapa ako ga prostim okom vidimo pod kutom $30'$?



Rezultat: $7^0 30'$.

Zadatak 012 (Mira, gimnazija)

Koliki je kut prema okomici na mirnu površinu mora pod kojim ronilac pod vodom vidi zalaz Sunca u more? (Indeks loma zraka je $n_1 = 1$, a morske vode $n_2 = 4/3$.)

Rješenje 012

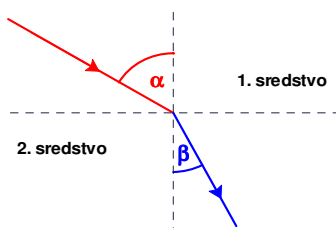
$$\alpha = 90^\circ, \quad n_1 = 1, \quad n_2 = 4/3, \quad \beta_m = ?$$

Apsolutni indeks loma sredstva n omjer je brzine svjetlosti c u vakuumu i brzine svjetlosti v u tom sredstvu:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Relativni indeks loma drugog sredstva prema prvom sredstvu omjer je apsolutnog indeksa loma drugog sredstva n_2 i apsolutnog indeksa loma prvog sredstva n_1 :

$$n_{2/1} = \frac{n_2}{n_1}.$$



- Zakon loma (refrakcije) svjetlosti
Zraka koja upada i zraka koja se lomi leže u istoj ravnini okomitoj na površinu, a omjer $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ je stalan.

- Snell – Descartesov zakon loma

$$n_{2/1} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Granični kut loma β_m je kut za koji je upadni kut $\alpha = 90^\circ$:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n_{2/1} \Rightarrow \frac{\sin 90^\circ}{\sin \beta_m} = n_{2/1} \Rightarrow \frac{1}{\sin \beta_m} = n_{2/1} \Rightarrow \sin \beta_m = \frac{1}{n_{2/1}}.$$

Budući da ronilac vidi Sunce pod graničnim kutom loma ($\alpha = 90^\circ$), vrijedi:

$$\sin \beta_m = \frac{1}{n_{2/1}} \Rightarrow \sin \beta_m = \frac{1}{\frac{n_2}{n_1}} \Rightarrow \sin \beta_m = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \sin \beta_m = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \beta_m = 48.6^\circ.$$

Vježba 012

Koliki je kut prema okomici na mirnu površinu mora pod kojim ronilac pod vodom vidi zalaz Sunca u more? (Indeks loma zraka je $n_1 = 1$, a morske vode $n_2 = 1.33$.)

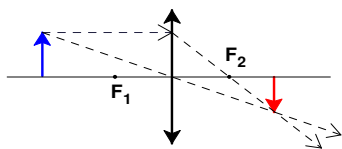
Rezultat: 48.75°.

Zadatak 013 (Mario, gimnazija)

Ispred konvergentne leće žarišne udaljenosti 20 cm stavljen je svijetli predmet na udaljenost 60 cm od tjemena, pa se dobije realna slika predmeta. Ako se na mjesto leće stavi sferno zrcalo, koliki mora biti njegov polumjer zakrivljenosti da se dobije virtualna slika svijetlog predmeta na istom mjestu gdje je bila realna slika dobijena lećom?

Rješenje 013

$$f = 20 \text{ cm}, \quad a = 60 \text{ cm}, \quad R = ?$$



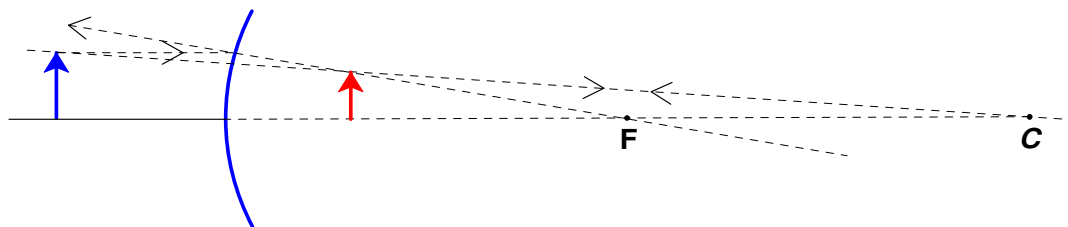
Leće s tankim rubom zovemo sabirne, konvergentne ili konveksne. Jednadžba je tanke leće:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljenost predmeta i b udaljenost slike od leće, a f je žarišna (fokalna) daljina leće. Udaljenost slike predmeta od leće iznosi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a-f}{a \cdot f} \Rightarrow b = \frac{a \cdot f}{a-f} = \frac{60 \text{ cm} \cdot 20 \text{ cm}}{60 \text{ cm} - 20 \text{ cm}} = 30 \text{ cm}.$$

Na mjesto leće stavi se sferno zrcalo.



Jednadžba sfernog zrcala je:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} = \frac{2}{R},$$

gdje je a udaljenost predmeta od tjemena, b udaljenost slike od tjemena sfernog zrcala, R polumjer zakrivljenosti zrcala. Udaljenost virtualnih slika i fokalna daljina konveksnog zrcala imaju negativan

predznak. Da bi se dobila virtualna slika predmeta na istom mjestu gdje je bila realna slika dobijena lećom, polumjer zakrivljenosti sfernog zrcala mora biti:

$$\left. \begin{array}{l} a = 60 \text{ cm} \\ b = -30 \text{ cm} \\ R = ? \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} \Rightarrow \frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{2}{R} \Rightarrow R = \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} = \frac{2 \cdot 60 \text{ cm} \cdot (-30 \text{ cm})}{60 \text{ cm} + (-30 \text{ cm})} = \frac{-3600 \text{ cm}^2}{30 \text{ cm}} = -120 \text{ cm}.$$

Vježba 013

Ispred konvergentne leće žarišne udaljenosti 10 cm stavljen je svijetli predmet na udaljenost 60 cm od tjemena, pa se dobije realna slika predmeta. Ako se na mjesto leće stavi sferno zrcalo, koliki mora biti njegov polumjer zakrivljenosti da se dobije virtualna slika svijetlog predmeta na istom mjestu gdje je bila realna slika dobijena lećom?

Rezultat: - 30 cm.

Zadatak 014 (Cvijet jabuke, gimnazija)

Za leću žarišne daljine f izračunajte najmanju moguću udaljenost između predmeta i njegove realne slike.

Rješenje 014

Jednadžba je tanke leće:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljenost predmeta, b udaljenost slike od leće, a f je fokalna (žarišna) daljina leće. Iz jednadžbe leće dobije se b :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{b} = \frac{a-f}{a \cdot f} \Rightarrow b = \frac{a \cdot f}{a-f}.$$

Ako slovom x označimo udaljenost između predmeta i njegove realne slike, vrijedi:

$$x = a + b \Rightarrow x = a + \frac{a \cdot f}{a-f} = \frac{a \cdot (a-f) + af}{a-f} = \frac{a^2 - af + af}{a-f} = \frac{a^2}{a-f}.$$

Najmanja udaljenost x dobije se računanjem minimalne vrijednosti funkcije $x(a)$:

$$x(a) = \frac{a^2}{a-f}.$$

Određimo prvu derivaciju funkcije $x(a)$ (deriviramo po varijabli a):

$$\left[\left(\frac{f}{g} \right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \right]$$

$$x'(a) = \frac{d x(a)}{d a} = \frac{2a \cdot (a-f) - a^2 \cdot 1}{(a-f)^2} = \frac{2a^2 - 2af - a^2}{(a-f)^2} = \frac{a^2 - 2af}{(a-f)^2} = \frac{a \cdot (a-2f)}{(a-f)^2}.$$

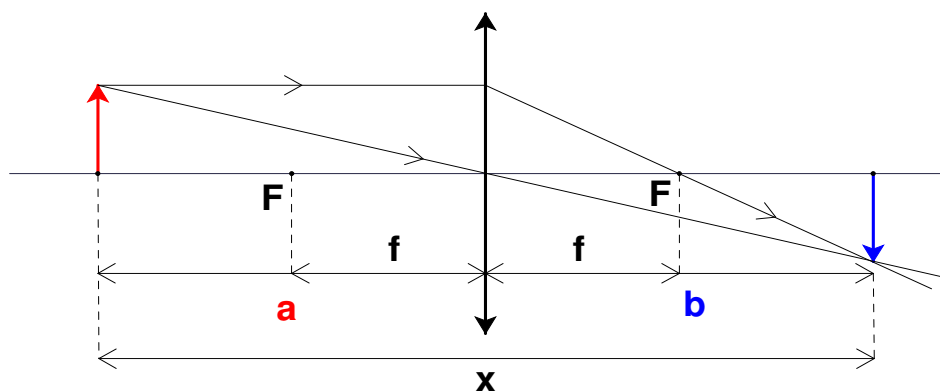
Prvu derivaciju izjednačimo s nulom da bismo dobili stacionarne točke:

$$\frac{a \cdot (a-2f)}{(a-f)^2} = 0 \Rightarrow a \cdot (a-2f) = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a - 2f = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \text{ (nema fizikalnog smisla)} \\ a = 2f. \end{cases}$$

Najmanja udaljenost između predmeta i njegove realne slike iznosi:

$$x = a + b = 2f + \frac{a \cdot f}{a-f} = 2f + \frac{2f \cdot f}{2f-f} = 2f + \frac{2f^2}{f} = 2f + 2f = 4f.$$

Grafički prikaz!



Vježba 014

Za leću žarišne daljine 5 cm izračunajte najmanju moguću udaljenost između predmeta i njegove realne slike.

Rezultat: $x = 20$ cm.

Zadatak 015 (Cvijet jabuke, Anita, gimnazija, gimnazija)

Predmet je udaljen od zastora 18 cm. Na koja dva načina treba postaviti jednu konvergentnu leću žarišne daljine 3 cm da bi ona u oba slučaja proizvela oštru sliku na zastoru? Koliko je povećanje u svakom slučaju? Kakvu sličnost uočavate između ova dva slučaja?

Rješenje 015

$$d = 18 \text{ cm}, \quad f = 3 \text{ cm}, \quad \gamma_1 = ? \quad \gamma_2 = ?$$

Udaljenost predmeta od zastora je $d = 18$ cm. Budući da se dobije oštra slika na zastoru, jednadžba leće glasi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljenost predmeta, b udaljenost slike od leće, a f je fokalna (žarišna) daljina leće.

Iz dobivenog sustava jednadžbi izračunaju se veličine a i b :

$$\left. \begin{array}{l} a + b = d \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 18 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 18 \\ \frac{a + b}{a \cdot b} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 18 \\ \frac{18}{a \cdot b} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} a + b = 18 \\ a \cdot b = 54 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} b = 18 - a \\ a \cdot b = 54 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a \cdot (18 - a) = 54 \Rightarrow 18a - a^2 = 54 \Rightarrow a^2 - 18a + 54 = 0 \Rightarrow$$

$$a_{1,2} = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 216}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{108}}{2} = \frac{18 \pm 6\sqrt{3}}{2} = 9 \pm 3\sqrt{3}.$$

Postoje dva rješenja za udaljenost predmeta od leće:

$$\begin{cases} a_1 = 9 + 3\sqrt{3} = 14.20 \text{ cm}, \\ a_2 = 9 - 3\sqrt{3} = 3.80 \text{ cm}. \end{cases}$$

Iz $a + b = 18$ dobiju se pripadne udaljenosti slike od leće:

$$\begin{cases} b_1 = 18 - a_1 = 18 \text{ cm} - 14.20 \text{ cm} = 3.80 \text{ cm}, \\ b_2 = 18 - a_2 = 18 \text{ cm} - 3.80 \text{ cm} = 14.20 \text{ cm}. \end{cases}$$

Na prvi način leća se postavi tako da je:

$$\begin{cases} a_1 = 14.20 \text{ cm}, \\ b_1 = 3.80 \text{ cm}. \end{cases}$$

Povećanje, tj. omjer između veličine slike i predmeta, iznosi:

$$\gamma_1 = -\frac{b_1}{a_1} = -\frac{3.80 \text{ cm}}{14.20 \text{ cm}} = -0.27.$$

Kad je γ_1 negativan, slika je obrnuta.

Na drugi način leća se postavi tako da je:

$$\begin{cases} a_2 = 3.80 \text{ cm}, \\ b_2 = 14.20 \text{ cm}. \end{cases}$$

Povećanje, tj. omjer između veličine slike i predmeta, iznosi:

$$\gamma_2 = -\frac{b_2}{a_2} = -\frac{14.20 \text{ cm}}{3.80 \text{ cm}} = -3.74.$$

Kad je γ_2 negativan, slika je obrnuta.

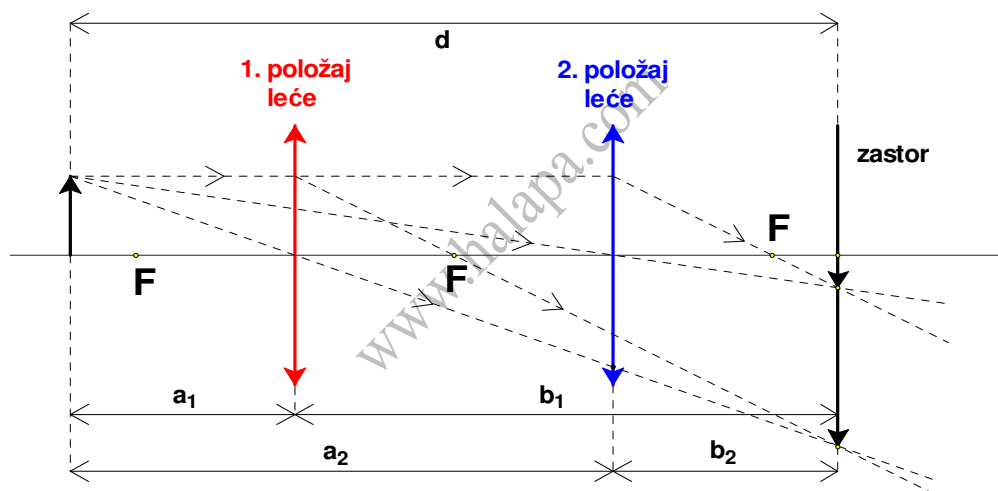
Sličnost koju uočavamo u ova dva slučaja je:

$$\begin{cases} a_1 = b_2, \\ a_2 = b_1. \end{cases}$$

Vježba 015

Predmet je udaljen od zastora 18 cm. Na koja dva načina treba postaviti jednu konvergentnu leću žarišne daljine 3 cm da bi ona u oba slučaja proizvela oštru sliku na zastoru? Grafički prikaži!

Rezultat:



Zadatak 016 (Anita, gimnazija)

Za predmet postavljen na optičku os pred sfernim konkavnim zrcalom na određenoj udaljenosti od zrcala, veličina slike je dvostruko manja od veličine predmeta. Kad se taj predmet pomakne za 5 cm duž optičke osi, veličina njegove slike postaje četiri puta manja od veličine predmeta. Odredite žarišnu daljinu ovog zrcala.

Rješenje 016

$$\Delta a = 5 \text{ cm}, \quad \gamma = \frac{1}{2}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{4}, \quad f = ?$$

Budući da se u oba slučaja radi o istom sfernom zrcalu, jednadžbe glase:

$$\bullet \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$

gdje je a udaljenost predmeta od tjemena zrcala, b udaljenost slike od tjemena zrcala, f udaljenost fokusa od tjemena. Povećanje zrcala je:

$$|\gamma| = \frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b \quad (1)$$

- $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}$,

gdje je a_1 udaljenost predmeta od tjemena zrcala, b_1 udaljenost slike od tjemena zrcala, f udaljenost fokusa od tjemena. Povećanje zrcala je:

$$\left| \gamma_1 \right| = \frac{b_1}{a_1} = \frac{1}{4} \Rightarrow a_1 = 4b_1 \quad (2)$$

Iz

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \quad \text{i} \quad \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}$$

slijedi:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} \Rightarrow \frac{a+b}{a \cdot b} = \frac{a_1+b_1}{a_1 \cdot b_1}. \quad (3)$$

U (3) uvrstimo (1) i (2):

$$\frac{2b+b}{2b \cdot b} = \frac{4b_1+b_1}{4b_1 \cdot b_1} \Rightarrow \frac{3b}{2b^2} = \frac{5b_1}{4b_1^2} \Rightarrow \frac{3}{2b} = \frac{5}{4b_1} \Rightarrow b_1 = \frac{10b}{12} = \frac{5}{6} \cdot b.$$

Pomoću omjera izračunamo a_1 :

$$\frac{a}{a_1} = \frac{2b}{4b_1} = \frac{2b}{4 \cdot \frac{5}{6} \cdot b} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow a_1 = \frac{5}{3} \cdot a.$$

Iz uvjeta zadatka dobije se a:

$$a_1 = a + \Delta a \Rightarrow \frac{5}{3}a = a + 5 \Rightarrow \frac{2}{3}a = 5 \cdot \frac{3}{2} \Rightarrow a = 7.5 \text{ cm.}$$

Tada b iznosi:

$$b = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \cdot 7.5 \text{ cm} = 3.75 \text{ cm.}$$

Žarišna daljina zrcala je:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \Rightarrow f = \frac{a \cdot b}{a+b} = \frac{7.5 \text{ cm} \cdot 3.75 \text{ cm}}{7.5 \text{ cm} + 3.75 \text{ cm}} = 2.5 \text{ cm.}$$

Vježba 016

Za predmet postavljen na optičku os pred sfernim konkavnim zrcalom na određenoj udaljenosti od zrcala, veličina slike je dvostruko manja od veličine predmeta. Kad se taj predmet pomakne za 3 cm duž optičke osi, veličina njegove slike postaje četiri puta manja od veličine predmeta. Odredite žarišnu daljinu ovog zrcala.

Rezultat: $f = 1.5 \text{ cm.}$

Zadatak 017 (Tea, gimnazija)

Plankonveksna leća od stakla ($n = 1.5$) ima polumjer zakrivljenosti 20 cm. Kolika je jakost leće?

Rješenje 017

$$n = 1.5, \quad R_1 = 20 \text{ cm} = 0.20 \text{ m}, \quad R_2 = \infty \Rightarrow \frac{1}{R_2} = 0 \text{ (jedna je strana leće ravna)}, \quad j = ?$$

Jakost leće j recipročna je žarišna udaljenost: $j = \frac{1}{f}$. Ako je n relativni indeks loma sredstva od kojeg je

leća napravljena u odnosu na sredstvo u kojem se nalazi, R_1 i R_2 polumjeri zakrivljenosti sfernih ploha leće, a f žarišna udaljenost, jednačba glasi:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right).$$

Tada je jakost leće jednaka:

$$j = (n-1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n-1) \cdot \frac{1}{R_1} = (1.5-1) \cdot \frac{1}{0.20 \text{ m}} = 2.5 \text{ m}^{-1}.$$

Vježba 017

Plankonveksna leća od stakla ($n = 1.5$) ima polumjer zakrivljenosti 40 cm. Kolika je jakost leće?

Rezultat: 1.25 m^{-1} .

Zadatak 018 (Linux, gimnazija)

Koje povećanje daje projekcijski aparat sa žarišnom duljinom objektiva 10 cm ako je 4 m udaljen od ekrana?

Rješenje 018

$$f = 10 \text{ cm} = 0.1 \text{ m}, \quad b = 4 \text{ m}, \quad m = ?$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{f} - \frac{1}{b} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b-f}{b \cdot f} \Rightarrow a = \frac{b \cdot f}{b-f}.$$

Povećanje iznosi:

$$|m| = \left| -\frac{b}{a} \right| = \left| \frac{b}{a} \right| = \left| \frac{b}{\frac{b \cdot f}{b-f}} \right| = \left| \frac{b \cdot (b-f)}{b \cdot f} \right| = \left| \frac{b-f}{f} \right| = \left| \frac{4 \text{ m} - 0.1 \text{ m}}{0.1 \text{ m}} \right| = 39.$$

Vježba 018

Koje povećanje daje projekcijski aparat sa žarišnom duljinom objektiva 20 cm ako je 4 m udaljen od ekrana?

Rezultat: 19.

Zadatak 019 (Buduća ekonomistica, gimnazija)

Dva koherentna monokromatska izvora, I_1 i I_2 emitiraju svjetlost valne duljine $\lambda = 589.3 \text{ nm}$. Okomito na simetralu spojnice postavljen je zastor na kojem se promatraju pruge interferencije. Međusobna udaljenost izvora jest $d = 0.3 \text{ mm}$, a udaljenost izvora od zastora $a = 1.5 \text{ m}$. Odredi udaljenost osme svijetle pruge od središnje pruge.

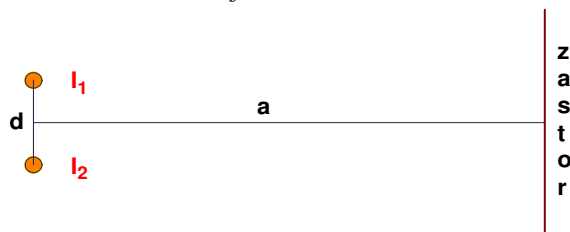
Rješenje 019

$$\lambda = 589.3 \text{ nm} = 589.3 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 5.893 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \quad d = 0.3 \text{ mm} = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad a = 1.5 \text{ m}, \quad s_8 = ?$$

Dva točkasta izvora svjetlosti su koherentna kad imaju jednaku frekvenciju i jednaku razliku faze. Ako postavimo zastor koji je usporedan sa spojnicom $I_1 I_2$ (koherentni izvori), onda na njemu vidimo pruge interferencije koje su na tome malom dijelu usporedni pravci. Pruge su ekvidistantne, a njihova međusobna udaljenost, tj. udaljenost dviju svijetlih ili dviju tamnih pruga, jest

$$s = \frac{\lambda \cdot a}{d},$$

gdje je a udaljenost od izvora do zastora, a d udaljenost među izvorima.



Budući da su pruge interferencije ekvidistantne, a njihova udaljenost s dana je izrazom $s = \frac{\lambda \cdot a}{d}$, slijedi:

$$s_8 = 8 \cdot \frac{\lambda \cdot a}{d} = 8 \cdot \frac{5.893 \cdot 10^{-7} \text{ m} \cdot 1.5 \text{ m}}{3 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = 2.36 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Vježba 019

Dva koherentna monokromatska izvora, I_1 i I_2 emitiraju svjetlost valne duljine $\lambda = 589.3$ nm. Okomito na simetralu spojnice postavljen je zastor na kojem se promatraju pruge interferencije. Međusobna udaljenost izvora jest $d = 0.3$ mm, a udaljenost izvora od zastora $a = 1.5$ m. Odredi udaljenost četvrte svijetle pruge od središnje pruge.

Rezultat: $1.18 \cdot 10^{-2}$ m.

Zadatak 020 (Buduća ekonomistica, gimnazija)

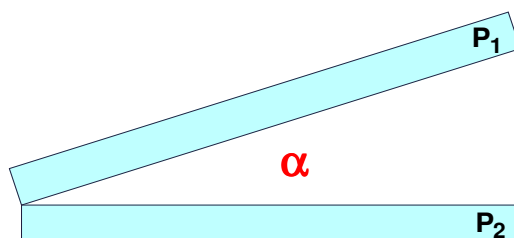
Monokromatska svjetlost ($\lambda = 0.58$ μm) pada okomito na dvije planparalelne ploče koje čine klin. Udaljenost dviju susjednih tamnih pruga je $s = 5$ mm. Koliki je kut među pločama?

Rješenje 020

$$\lambda = 0.58 \mu\text{m} = 5.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}, \quad s = 5 \text{ mm} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}, \quad \alpha = ?$$

Klin se sastoji od dviju planparalelnih ploča koje zatvaraju kut α . Refleksijom zraka svjetlosti na plohama P_1 i P_2 dobijemo pruge interferencije. Udaljenost između dviju tamnih pruga je

$$s = \frac{\lambda}{2 \cdot \alpha}.$$



Tada je kut između ploča jednak:

$$s = \frac{\lambda}{2 \cdot \alpha} \Rightarrow \alpha = \frac{\lambda}{2 \cdot s} = \frac{5.8 \cdot 10^{-7} \text{ m}}{2 \cdot 5 \cdot 10^{-3} \text{ m}} = 5.8 \cdot 10^{-5} = 0.000058 \text{ rad}.$$

Vježba 020

Monokromatska svjetlost ($\lambda = 0.58$ μm) pada okomito na dvije planparalelne ploče koje čine klin. Udaljenost dviju susjednih tamnih pruga je $s = 10$ mm. Koliki je kut među pločama?

Rezultat: $\alpha = 0.000029$ rad.