Dokaz 541

Dokažite ako je p prost broj različit od 2 i 3 tada je p + 1 ili p - 1 djeljivo sa 6.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**
Broj 1 nije ni prost, ni složen broj. Prostih brojeva ima beskonačno mnogo.
Prosti brojevi su: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, …

▶

Svaki se broj koji nije djeljiv ni sa 2 ni sa 3 pa i prost broj može napisati u jednom obliku $6 \cdot n - 1$ ili $6 \cdot n + 1$.
Ako je $p = 6 \cdot n - 1$ tada je

$$p + 1 = 6 \cdot n - 1 + 1 = 6 \cdot n - 1 + 1 = 6 \cdot n.$$

Ako je $p = 6 \cdot n + 1$ tada je

$$p - 1 = 6 \cdot n + 1 - 1 = 6 \cdot n + 1 - 1 = 6 \cdot n. \blacksquare$$

Dokaz 542

Dokažite ako je neki broj zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva njegov je kvadrat također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Teorija

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2 .$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2 .$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n .$$

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n .$$

▶

Neka je n = a^2 + b^2. Tada slijedi:

$$n=a^2+b^2 \Rightarrow n=a^2+b^2 \ /^2 \Rightarrow n^2=\left(a^2+b^2\right)^2 \Rightarrow n^2=\left(a^2\right)^2+2\cdot a^2\cdot b^2+\left(b^2\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=a^4+2\cdot a^2\cdot b^2+b^4 \Rightarrow n^2=a^4-2\cdot a^2\cdot b^2+b^4+4\cdot a^2\cdot b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2=\left(a^2-b^2\right)^2+(2\cdot a\cdot b)^2 . \ \blacksquare$$

Dokaz 543

Dokažite ako brojevi a_1, a_2, a_3, … čine geometrijski niz, onda je i ovaj niz geometrijski:
$a_1 \cdot b$, $a_2 \cdot b$, $a_3 \cdot b$, …

Teorija

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

▶

Ako brojevi a_1, a_2, a_3, … čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan.
Vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = q.$$

Treba pokazati da isto vrijedi i za navedeni niz.

♥ $\frac{a_2 \cdot b}{a_1 \cdot b} = \frac{a_2 \cdot b}{a_1 \cdot b} = \frac{a_2}{a_1} = q.$

♥ $\frac{a_3 \cdot b}{a_2 \cdot b} = \frac{a_3 \cdot b}{a_2 \cdot b} = \frac{a_3}{a_2} = q.$

♥ $\frac{a_4 \cdot b}{a_3 \cdot b} = \frac{a_4 \cdot b}{a_3 \cdot b} = \frac{a_4}{a_3} = q.$

…

♥ $\frac{a_{n+1} \cdot b}{a_n \cdot b} = \frac{a_{n+1} \cdot b}{a_n \cdot b} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$ itd. ■

Dokaz 544

Dokažite ako brojevi a_1, a_2, a_3, … čine geometrijski niz, onda je i ovaj niz geometrijski:

$$\frac{b}{a_1}, \frac{b}{a_2}, \frac{b}{a_3}, \ldots$$

Teorija

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom q ≠ 0, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \;,\; n \neq 0 \;,\; n \neq 1.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

▶

Ako brojevi a_1, a_2, a_3, … čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan.
Vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = q.$$

Treba pokazati da isto vrijedi i za navedeni niz.

♥ $$\frac{\frac{b}{a_2}}{\frac{b}{a_1}} = \frac{\frac{b}{a_2}}{\frac{b}{a_1}} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{\frac{a_2}{a_1}} = \frac{1}{q}.$$

♥ $$\frac{\frac{b}{a_3}}{\frac{b}{a_2}} = \frac{\frac{b}{a_3}}{\frac{b}{a_2}} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{1}{\frac{a_3}{a_2}} = \frac{1}{q}.$$

♥ $$\frac{\frac{b}{a_4}}{\frac{b}{a_3}} = \frac{\frac{b}{a_4}}{\frac{b}{a_3}} = \frac{a_3}{a_4} = \frac{1}{\frac{a_4}{a_3}} = \frac{1}{q}.$$

…

♥ $\dfrac{\dfrac{b}{a_{n+1}}}{\dfrac{b}{a_n}} = \dfrac{\dfrac{b}{a_{n+1}}}{\dfrac{b}{a_n}} = \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \dfrac{1}{\dfrac{a_{n+1}}{a_n}} = \dfrac{1}{q}$. itd. ■

Dokaz 545

Dokažite ako brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ čine geometrijski niz, onda je i ovaj niz geometrijski:
$a_1^n, a_2^n, a_3^n, \ldots$

Teorija

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad (a : b)^n = a^n : b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

▶

Ako brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan.
Vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = q.$$

Treba pokazati da isto vrijedi i za navedeni niz.

♥ $\frac{a_2^n}{a_1^n} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n = q^n.$

♥ $\frac{a_3^n}{a_2^n} = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^n = q^n.$

♥ $\frac{a_4^n}{a_3^n} = \left(\frac{a_4}{a_3}\right)^n = q^n.$

…

♥ $\frac{a_{n+1}^n}{a_n^n} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^n = q^n.$ itd. ■

Dokaz 546

Dokažite ako brojevi a_1, a_2, a_3, … čine geometrijski niz, onda je i ovaj niz geometrijski:
$a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, $a_3 + a_4$, …

Teorija

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

Ako brojevi a_1, a_2, a_3, … čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan.
Vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = q.$$

Treba pokazati da isto vrijedi i za navedeni niz.

♥ $\frac{a_2 + a_3}{a_1 + a_2} = \frac{a_2 + a_2 \cdot q}{a_1 + a_1 \cdot q} = \frac{a_2 \cdot (1 + q)}{a_1 \cdot (1 + q)} = \frac{a_2 \cdot (1 + q)}{a_1 \cdot (1 + q)} = \frac{a_2}{a_1} = q.$

♥ $\frac{a_3 + a_4}{a_2 + a_3} = \frac{a_3 + a_3 \cdot q}{a_2 + a_2 \cdot q} = \frac{a_3 \cdot (1 + q)}{a_2 \cdot (1 + q)} = \frac{a_3 \cdot (1 + q)}{a_2 \cdot (1 + q)} = \frac{a_3}{a_2} = q.$

♥ $\frac{a_4 + a_5}{a_3 + a_4} = \frac{a_4 + a_4 \cdot q}{a_3 + a_3 \cdot q} = \frac{a_4 \cdot (1 + q)}{a_3 \cdot (1 + q)} = \frac{a_4 \cdot (1 + q)}{a_3 \cdot (1 + q)} = \frac{a_4}{a_3} = q.$

…

♥ $\frac{a_{n+1} + a_{n+2}}{a_n + a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} + a_{n+1} \cdot q}{a_n + a_n \cdot q} = \frac{a_{n+1} \cdot (1 + q)}{a_n \cdot (1 + q)} = \frac{a_{n+1} \cdot (1 + q)}{a_n \cdot (1 + q)} = \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$ itd. ■

Dokaz 547

Dokažite ako brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ čine geometrijski niz, onda je i ovaj niz geometrijski:
$a_1 \cdot a_2, a_2 \cdot a_3, a_3 \cdot a_4, \ldots$

Teorija

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad (a : b)^n = a^n : b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \; , \; n \neq 0 \; , \; n \neq 1.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

▶

Ako brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots$ čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan.
Vrijedi:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \ldots = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ldots = q.$$

Treba pokazati da isto vrijedi i za navedeni niz.

♥ $\frac{a_2 \cdot a_3}{a_1 \cdot a_2} = \frac{a_2 \cdot a_2 \cdot q}{a_1 \cdot a_1 \cdot q} = \frac{a_2^2 \cdot q}{a_1^2 \cdot q} = \frac{a_2^2 \cdot q}{a_1^2 \cdot q} = \frac{a_2^2}{a_1^2} = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 = q^2.$

♥ $\frac{a_3 \cdot a_4}{a_2 \cdot a_3} = \frac{a_3 \cdot a_3 \cdot q}{a_2 \cdot a_2 \cdot q} = \frac{a_3^2 \cdot q}{a_2^2 \cdot q} = \frac{a_3^2 \cdot q}{a_2^2 \cdot q} = \frac{a_3^2}{a_2^2} = \left(\frac{a_3}{a_2}\right)^2 = q^2.$

♥ $\frac{a_4 \cdot a_5}{a_3 \cdot a_4} = \frac{a_4 \cdot a_4 \cdot q}{a_3 \cdot a_3 \cdot q} = \frac{a_4^2 \cdot q}{a_3^2 \cdot q} = \frac{a_4^2 \cdot q}{a_3^2 \cdot q} = \frac{a_4^2}{a_3^2} = \left(\frac{a_4}{a_3}\right)^2 = q^2.$

…

♥ $\frac{a_{n+1} \cdot a_{n+2}}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} \cdot a_{n+1} \cdot q}{a_n \cdot a_n \cdot q} = \frac{a_{n+1}^2 \cdot q}{a_n^2 \cdot q} = \frac{a_{n+1}^2 \cdot q}{a_n^2 \cdot q} = \frac{a_{n+1}^2}{a_n^2} = \left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)^2 = q^2.$ itd. ■

Dokaz 548

Dokažite ako brojevi a, b, c čine aritmetički niz jednadžba $a \cdot x^2 - 2 \cdot b \cdot x + c = 0$ ima korijen 1.

Teorija

Niz (slijed) je aritmetički ako je razlika svakog člana niza (osim prvog) i člana ispred njega stalna i iznosi d.

$$a_2 - a_1 = d \ , \ a_3 - a_2 = d \ , \ a_4 - a_3 = d \ , \ a_5 - a_4 = d \ , \ a_6 - a_5 = d \ , \ \ldots \ , \ a_n - a_{n-1} = d \ \ldots$$

$$a_n - a_{n-1} = d \ , \ n \geq 2.$$

Broj d naziva se razlika (diferencija) aritmetičkog niza. Aritmetički niz je jednoznačno određen ako znamo prvi član a_1 i razliku d.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad a^{n-m} = a^n : a^m.$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a \cdot b = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0 \ \text{ili} \ b = 0 \ \text{ili} \ a = b = 0.$$

▶

1.inačica

Ako brojevi a, b, c čine aritmetički niz, onda je razlika između člana i člana pred njim stalna.

Vrijedi:

$$b - a = c - b \ \Rightarrow \ b + b = a + c \ \Rightarrow \ 2 \cdot b = a + c \ \Rightarrow \ a + c = 2 \cdot b \ \Rightarrow \ a - 2 \cdot b + c = 0.$$

Usporedbom

$$\left.\begin{array}{l} a \cdot x^2 - 2 \cdot b \cdot x + c = 0 \\ a - 2 \cdot b + c = 0 \end{array}\right\}$$

vidi se da je x = 1 korijen zadane jednadžbe. ■

2.inačica

Ako brojevi a, b, c čine aritmetički niz, onda je razlika između člana i člana pred njim stalna.

Vrijedi:

$$b - a = c - b \ \Rightarrow \ b + b = a + c \ \Rightarrow \ 2 \cdot b = a + c.$$

Dokažimo da je x = 1 korijen zadane jednadžbe.

$$a \cdot x^2 - 2 \cdot b \cdot x + c = 0 \ \Rightarrow \ [\, 2 \cdot b = a + c \,] \ \Rightarrow \ a \cdot x^2 - (a + c) \cdot x + c = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a \cdot x^2 - a \cdot x - c \cdot x + c = 0 \ \Rightarrow \ \left(a \cdot x^2 - a \cdot x\right) + (-c \cdot x + c) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a \cdot x \cdot (x - 1) - c \cdot (x - 1) = 0 \ \Rightarrow \ (x - 1) \cdot (a \cdot x - c) = 0 \ \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ a \cdot x - c = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ a \cdot x = c \end{array}\right\} \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x = 1 \\ a \cdot x = c \ /: a \end{array}\right\} \Rightarrow \ \left.\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = \dfrac{c}{a} \end{array}\right\}. \ ■$$

Dokaz 549

Dokažite ako brojevi a, b, c čine geometrijski niz, onda jednadžba $a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c = 0$ ima dvostruki korijen.

Teorija

Niz (a_n) je geometrijski niz ako je svaki član niza, počevši od drugog, jednak prethodnom članu pomnoženom s konstantom $q \neq 0$, tj.

$$a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Broj q naziva se količnik geometrijskog niza.
Niz je geometrijski ako je omjer svakog člana i člana ispred njega stalan:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Diskriminanta kvadratne jednadžbe

$$a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$$

je broj

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c.$$

♥ Ako je $D > 0$, jednadžba ima dva realna rješenja.
♥ Ako je $D = 0$, jednadžba ima jedno dvostruko realno rješenje.
♥ Ako je $D < 0$, jednadžba ima kompleksno – konjugirana rješenja.

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \quad , \quad a = \left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \ , \ a, b \geq 0.$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R \quad , \quad a^2 = 0 \Rightarrow a = 0.$$

Dijeljenje drugih korijena:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \ , \ a, b \geq 0.$$

▶

1.inačica
Ako brojevi a, b, c čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan.
Vrijedi:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \ / \cdot a \cdot b \Rightarrow b^2 = a \cdot c.$$

Pokažimo da je diskriminanta zadane jednadžbe jednaka nuli.

$$a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x+c=0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x+c=0 \\ a=a\ ,\ b=2\cdot b\ ,\ c=c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\, D=b^2-4\cdot a\cdot c \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=(2\cdot b)^2-4\cdot a\cdot c \Rightarrow D=4\cdot b^2-4\cdot a\cdot c \Rightarrow \left[\, b^2=a\cdot c \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=4\cdot a\cdot c-4\cdot a\cdot c \Rightarrow D=4\cdot a\cdot c-4\cdot a\cdot c \Rightarrow D=0. \ \blacksquare$$

2.inačica

Ako brojevi a, b, c čine geometrijski niz, onda je kvocijent između člana i člana pred njim stalan. Vrijedi:

$$\frac{b}{a}=\frac{c}{b} \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{c}{b}\ /\cdot a\cdot b \Rightarrow b^2=a\cdot c \Rightarrow b^2=a\cdot c\ /\sqrt{\ } \Rightarrow b=\sqrt{a\cdot c} \Rightarrow b=\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}.$$

Dalje slijedi:

$$a\cdot x^2+2\cdot b\cdot x+c=0 \Rightarrow \left[\, b=\sqrt{a}\cdot\sqrt{c} \,\right] \Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2\cdot x^2+2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{c}\cdot x+\left(\sqrt{c}\right)^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\cdot x+\sqrt{c}\right)^2=0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot x+\sqrt{c}=0 \Rightarrow \sqrt{a}\cdot x=-\sqrt{c} \Rightarrow \sqrt{a}\cdot x=-\sqrt{c}\ /:\sqrt{a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=-\frac{\sqrt{c}}{\sqrt{a}} \Rightarrow x_{1,2}=-\sqrt{\frac{c}{a}}. \ \blacksquare$$

Dokaz 550

Dokažite da je funkcija inverzna linearnoj funkciji i sama linearna.

Teorija

Kompozicija funkcija:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) \quad , \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

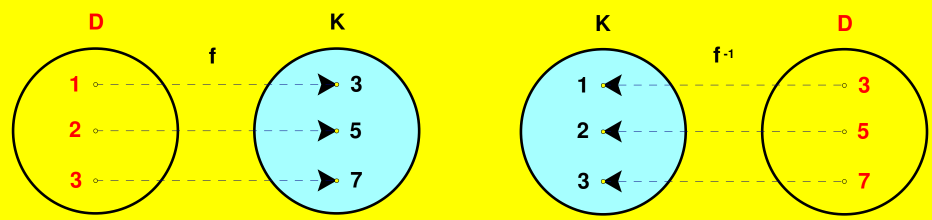
Funkcija $g : K \to D$ inverzna je funkciji $f : D \to K$ ako vrijedi:

$$g(f(x)) = x \text{ za sve } x \in D$$

$$f(g(y)) = y \text{ za sve } y \in K.$$

Inverzna funkcija g piše se f^{-1}.

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad , \quad f\left(f^{-1}(x)\right) = x$$



Linearna funkcija je realna funkcija zadana jednadžbom f(x) = a · x + b, a ≠ 0.

▶

1.inačica

$$y = k \cdot x + l \Rightarrow k \cdot x + l = y \Rightarrow k \cdot x = y - l \Rightarrow k \cdot x = y - l \;/\cdot \frac{1}{k} \Rightarrow x = \frac{1}{k} \cdot y - \frac{l}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow [x \leftrightarrow y] \Rightarrow y = \frac{1}{k} \cdot x - \frac{l}{k} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ a = \frac{1}{k} \\ b = -\frac{l}{k} \end{array}\right] \Rightarrow y = a \cdot x + b. \ \blacksquare$$

2.inačica

$$y = k \cdot x + l \Rightarrow [x \leftrightarrow y] \Rightarrow x = k \cdot y + l \Rightarrow k \cdot y + l = x \Rightarrow k \cdot y = x - l \Rightarrow k \cdot y = x - l \;/\cdot \frac{1}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{k} \cdot x - \frac{l}{k} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{zamjena} \\ a = \frac{1}{k} \\ b = -\frac{l}{k} \end{array}\right] \Rightarrow y = a \cdot x + b. \ \blacksquare$$

3.inačica

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(x) = x \Rightarrow f\left(f^{-1}(x)\right) = x \Rightarrow [f(x) = k \cdot x + l] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k \cdot f^{-1}(x) + l = x \Rightarrow k \cdot f^{-1}(x) = x - l \Rightarrow k \cdot f^{-1}(x) = x - l \;/\cdot \frac{1}{k} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{1}{k} \cdot x - \frac{l}{k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ a = \frac{1}{k} \\ b = -\frac{l}{k} \end{bmatrix} \Rightarrow f^{-1}(x) = a \cdot x + b. \blacksquare$$

Dokaz 551

Why sin x can't be greater than $\sqrt{2}+\cos x$***? (Mala Sirena, studies mathematics)***

Teorija

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \le b \ \ , \ \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \le b \cdot c.$$

Temeljni trigonometrijski identitet

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Dijeljenje drugih korijena:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \quad , \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo:

$$|x| \ge x \ \ , \ \ x \in R$$

Za realne brojeve a, b > 0 vrijedi:

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

Broj $\frac{a+b}{2}$ zove se aritmetička sredina, a broj $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ kvadratna sredina brojeva a i b.

▶

You can use the AM – QM inequality:

$$\frac{|\sin x| + |\cos x|}{2} \le \sqrt{\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{2}} \Rightarrow \frac{|\sin x| + |\cos x|}{2} \le \sqrt{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{|\sin x| + |\cos x|}{2} \le \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|\sin x| + |\cos x|}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{|\sin x| + |\cos x|}{2} \le \frac{\sqrt{2}}{2} \ / \cdot 2 \Rightarrow |\sin x| + |\cos x| \le \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\sin x| \le \sqrt{2} - |\cos x| \Rightarrow \sin x \le |\sin x| \le \sqrt{2} - |\cos x| \le \sqrt{2} + \cos x$$

because, for

$$x \in \left(\left(\frac{1}{2} + 2 \cdot k \right) \cdot \pi, \left(\frac{3}{2} + 2 \cdot k \right) \cdot \pi \right)$$

$$\sqrt{2} - |\cos x| \le \sqrt{2} + \cos x$$

and, for

$$x \in \left(\left(-\frac{1}{2} + 2 \cdot k \right) \cdot \pi, \left(\frac{1}{2} + 2 \cdot k \right) \cdot \pi \right)$$

$$\sqrt{2} - |\cos x| = \sqrt{2} - \cos x \le \sqrt{2} + \cos x. \ \blacksquare$$

Dokaz 552

Dokažite identitet $\sin(2 \cdot x) = \dfrac{2}{tg\ x + ctg\ x}.$

Teorija

Formula za sinus dvostrukog kuta

$$\sin(2 \cdot \alpha) = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \quad , \quad 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin(2 \cdot \alpha).$$

Definicija tangensa pomoću sinusa i kosinusa:

$$tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \frac{\sin x}{\cos x} = tg\ x.$$

Definicija kotangensa pomoću sinusa i kosinusa:

$$ctg\ x = \frac{\cos x}{\text{sins}\ x} \quad , \quad \frac{\cos x}{\sin x} = ctg\ x.$$

Temeljni trigonometrijski identitet

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad , \quad 1 = \cos^2 x + \sin^2 x.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n} \quad , \quad \frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad , \quad a^{n-m} = \frac{a^n}{a^m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶

1.inačica

$$\sin(2\cdot x)=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\frac{2}{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}=\frac{2}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}=\frac{2}{\frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}=$$

$$=\frac{2}{\frac{\sin^2 x}{\sin x\cdot\cos x}+\frac{\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}=\frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{2}{tg\,x+ctg\,x}.\ \blacksquare$$

2.inačica

$$\frac{2}{tg\,x+ctg\,x}=\frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}}=\frac{2}{\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}}=\frac{2}{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}=\frac{\frac{2}{1}}{\frac{1}{\sin x\cdot\cos x}}=$$

$$=2\cdot\sin x\cdot\cos x=\sin(2\cdot x).\ \blacksquare$$

Dokaz 553

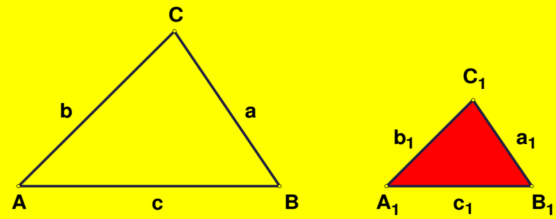
U trokutu ABC vrijedi $\angle ABC = 2 \cdot \angle ACB.$ ***Dokažite da je*** $|BC| \cdot |AB| = |AC|^2 - |AB|^2.$

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Nasuprot jednakih stranica leže jednaki kutovi.
Kut koji je susjedni kut nekog unutarnjeg kuta trokuta nazivamo **vanjskim** kutom tog trokuta.
Vanjski kut trokuta jednak je zbroju njemu nasuprotnih unutarnjih kutova.
Jednakokračni trokut je onaj kome su dvije stranice jednakih duljina i te stranice se nazivaju krakovi, dok je treća stranica (osnovica) različite duljine od duljine kraka.
Sličnost trokuta
Kažemo da su dva trokuta slična ako postoji pridruživanje vrhova jednog vrhovima drugog tako da su odgovarajući kutovi jednaki, a odgovarajuće stranice proporcionalne.

$$\alpha = \alpha_1 \;,\; \beta = \beta_1 \;,\; \gamma = \gamma_1 \quad , \quad \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k.$$

Omjer stranica sličnih trokuta k zovemo koeficijent sličnosti.



Prvi poučak sličnosti (K – K)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u dva kuta.
Drugi poučak sličnosti (S – K – S)
Dva su trokuta slična ako se podudaraju u jednom kutu, a stranice koje određuju taj kut su proporcionalne.
Treći poučak sličnosti (S – S – S)
Dva su trokuta slična ako su im sve odgovarajuće stranice proporcionalne.
Četvrti poučak sličnosti (S – S – K)
Dva su trokuta slična ako su im dvije stranice proporcionalne, a podudaraju se u kutu nasuprot većoj stranici.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

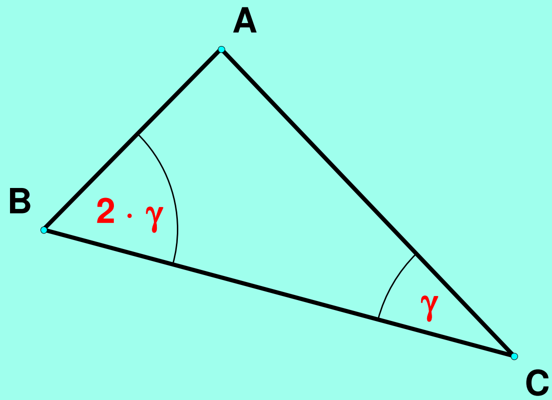
Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

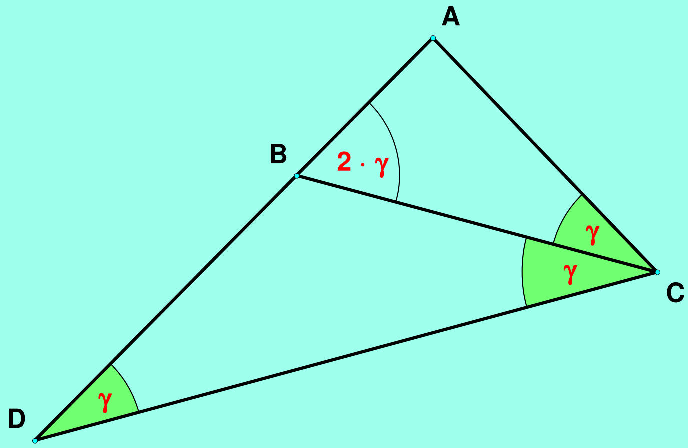
$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶



Produžimo stranicu AB preko točke B do točke D tako da je

$$|BC| = |BD|.$$



Trokut BDC je jednakokračan pa vrijedi

$$\angle BDC = \angle DCB = \gamma.$$

Sa slike vidi se:

$$|AD| = |AB| + |BD| \Rightarrow |AD| = |AB| + |BC|.$$

Iz sličnosti trokuta ΔABC i ΔADC (podudaraju se u dva kuta, K – K) slijedi razmjer:

$$\frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \Rightarrow \frac{|AD|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|AB|} \; / \cdot |AC| \cdot |AB| \Rightarrow |AD| \cdot |AB| = |AC|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[|AD| = |AB| + |BC| \right] \Rightarrow \left(|AB| + |BC| \right) \cdot |AB| = |AC|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |AB|^2 + |BC| \cdot |AB| = |AC|^2 \Rightarrow |BC| \cdot |AB| = |AC|^2 - |AB|^2. \blacksquare$$

Zahvaljujem Lauri Župčić, studentici PMF – a, na dokazu!

Dokaz 554

Dokažite ako je $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ ***da su vektori okomiti.***

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \quad , \quad a=\left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Formula za skalarni produkt vektora $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}$ i $\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}$ pomoću njihovih komponenata u pravokutnom koordinatnom sustavu (Kartezijevu koordinatnom sustavu) glasi:

$$\vec{a}\circ\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y.$$

Dva su vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ okomita ako im je skalarni produkt jednak nuli:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \;\Rightarrow\; a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0.$$

Duljina vektora $\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}$ definira se $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$.

▶

Neka su zadani vektori

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j} \text{ i } \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}$$

$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{a}-\vec{b}\right| \Rightarrow \left|a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\right|=\left|a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}-\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\right)\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}\right|=\left|a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}-b_x\cdot\vec{i}-b_y\cdot\vec{j}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left|\left(a_x+b_x\right)\cdot\vec{i}+\left(a_y+b_y\right)\cdot\vec{j}\right|=\left|\left(a_x-b_x\right)\cdot\vec{i}+\left(a_y-b_y\right)\cdot\vec{j}\right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(a_x+b_x\right)^2+\left(a_y+b_y\right)^2}=\sqrt{\left(a_x-b_x\right)^2+\left(a_y-b_y\right)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{\left(a_x+b_x\right)^2+\left(a_y+b_y\right)^2}=\sqrt{\left(a_x-b_x\right)^2+\left(a_y-b_y\right)^2} \quad /^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\left(a_x+b_x\right)^2+\left(a_y+b_y\right)^2}\right)^2=\left(\sqrt{\left(a_x-b_x\right)^2+\left(a_y-b_y\right)^2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a_x+b_x\right)^2+\left(a_y+b_y\right)^2=\left(a_x-b_x\right)^2+\left(a_y-b_y\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_x^2+2\cdot a_x\cdot b_x+b_x^2+a_y^2+2\cdot a_y\cdot b_y+b_y^2=a_x^2-2\cdot a_x\cdot b_x+b_x^2+a_y^2-2\cdot a_y\cdot b_y+b_y^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_x^2+2\cdot a_x\cdot b_x+b_x^2+a_y^2+2\cdot a_y\cdot b_y+b_y^2=a_x^2-2\cdot a_x\cdot b_x+b_x^2+a_y^2-2\cdot a_y\cdot b_y+b_y^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a_x\cdot b_x+2\cdot a_y\cdot b_y=-2\cdot a_x\cdot b_x-2\cdot a_y\cdot b_y\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot a_x\cdot b_x+2\cdot a_y\cdot b_y+2\cdot a_x\cdot b_x+2\cdot a_y\cdot b_y=0\ \Rightarrow\ 4\cdot a_x\cdot b_x+4\cdot a_y\cdot b_y=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 4\cdot a_x\cdot b_x+4\cdot a_y\cdot b_y=0\ /:4\ \Rightarrow\ a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y=0.\ \blacksquare$$

Dokaz 555

Dokažite ako je P period od funkcija f i g, onda je P period i od funkcije $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$, gdje su α i β bilo koji realni brojevi.

Teorija

Ako za funkciju $f : D \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P) = f(x), \text{ za svaki } x \in D,$$

tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi gornja formula nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivni broj P, tada se on naziva temeljni period.

▶

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x+P) = \alpha \cdot f(x+P) + \beta \cdot g(x+P) = \begin{bmatrix} f(x+P) = f(x) \\ g(x+P) = g(x) \end{bmatrix} = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) =$$

$$= (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x), \text{ tj. P je period od } \alpha \cdot f + \beta \cdot g. \ \blacksquare$$

Dokaz 556

Dokažite ako je P period od funkcija f i g, onda je P period i od funkcije $f \cdot g$.

Teorija

Ako za funkciju $f : D \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P) = f(x), \text{ za svaki } x \in D,$$

tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi gornja formula nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivni broj P, tada se on naziva temeljni period.

▶

$$(f \cdot g)(x+P) = f(x+P) \cdot g(x+P) = \begin{bmatrix} f(x+P) = f(x) \\ g(x+P) = g(x) \end{bmatrix} = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x),$$

tj. P je period od $f \cdot g$. ■

Dokaz 557

Dokažite ako je P period od funkcija f i g, onda je P period i od funkcije $\frac{f}{g},\ g(x) \neq 0,\ \forall x \in R.$

Teorija

Ako za funkciju $f : D \to R$ postoji P > 0 takav da je

$$f(x+P) = f(x),\ \text{za svaki}\ x \in D,$$

tada funkciju f nazivamo periodična funkcija. Pozitivni brojevi P za koje vrijedi gornja formula nazivaju se periodi funkcije f. Ako postoji najmanji takav pozitivni broj P, tada se on naziva temeljni period.

▶

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x+P) = \frac{f(x+P)}{g(x+P)} = \left[\begin{array}{c} f(x+P) = f(x) \\ g(x+P) = g(x) \end{array}\right] = \frac{f(x)}{g(x)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x),$$

tj. P je period od $\frac{f}{g}$. ■

Dokaz 558

Dokažite u svakom pravokutnom trokutu vrijedi relacija $tg(2\cdot\beta)=\frac{2\cdot a\cdot b}{a^2-b^2}.$

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.
Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.
Formule za sinus i kosinus dvostrukog kuta

$$\sin(2\cdot\alpha)=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha \quad , \quad 2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\sin(2\cdot\alpha).$$

$$\cos(2\cdot\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha \quad , \quad \cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos(2\cdot\alpha).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Definicija tangensa pomoću sinusa i kosinusa:

$$tg\,x=\frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \frac{\sin x}{\cos x}=tg\,x.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

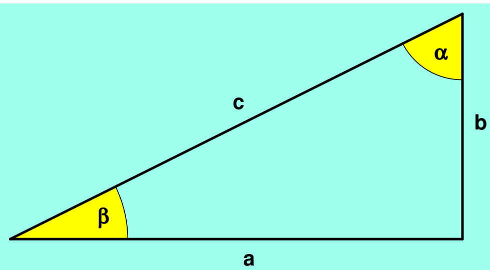
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \quad , \quad n\neq 0 \quad , \quad n\neq 1.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

▶



Sa slike vidi se:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\beta=\frac{b}{c}\\ \cos\beta=\frac{a}{c}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{b}{c}=\sin\beta\\ \frac{a}{c}=\cos\beta\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\frac{b}{c}=\sin\beta\ /\cdot c\\ \frac{a}{c}=\cos\beta\ /\cdot c\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}b=c\cdot\sin\beta\\ a=c\cdot\cos\beta\end{array}\right\}.$$

Sada je

$$\frac{2\cdot a\cdot b}{a^2-b^2}=\frac{2\cdot c\cdot\cos\beta\cdot c\cdot\sin\beta}{(c\cdot\cos\beta)^2-(c\cdot\sin\beta)^2}=\frac{2\cdot c^2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta}{c^2\cdot\cos^2\beta-c^2\cdot\sin^2\beta}=\frac{c^2\cdot(2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta)}{c^2\cdot\left(\cos^2\beta-\sin^2\beta\right)}=$$

$$=\frac{c^2\cdot(2\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta)}{c^2\cdot\left(\cos^2\beta-\sin^2\beta\right)}=\frac{\sin(2\cdot\beta)}{\cos(2\cdot\beta)}=tg\,(2\cdot\beta).\ \blacksquare$$

Dokaz 559

Dokažite ako u trokutu vrijedi relacija $\cos(2\cdot\beta)=\frac{a^2-b^2}{c^2}$, ***a > b, onda je trokut pravokutan.***

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Kosinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete uz taj kut i duljine hipotenuze.

Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)

U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2=b^2+c^2-2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha,$$
$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta,$$
$$c^2=a^2+b^2-2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma.$$

Formula za kosinus dvostrukog kuta

$$\cos(2\cdot\alpha)=2\cdot\cos^2\alpha-1 \quad , \quad 2\cdot\cos^2\alpha-1=\cos(2\cdot\alpha).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m} \quad , \quad a^{n-m}=a^n:a^m.$$

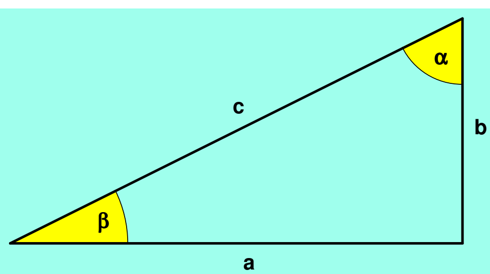
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

▶



$$\cos(2\cdot\beta)=\frac{a^2-b^2}{c^2} \Rightarrow 2\cdot\cos^2\beta-1=\frac{a^2-b^2}{c^2} \Rightarrow 2\cdot\cos^2\beta-1=\frac{a^2-b^2}{c^2} \;/\cdot c^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta-c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2+c^2-2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta.$$

Iz kosinusova poučka dobijemo

$$b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta.$$

Sada je

$$\left.\begin{array}{l} b^2=a^2+c^2-2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta \\ b^2=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \end{array}\right\} \Rightarrow a^2+c^2-2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+c^2-2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta=a^2+c^2-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \Rightarrow -2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta=-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2\cdot c^2\cdot\cos^2\beta=-2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \;/:(-2) \Rightarrow c^2\cdot\cos^2\beta=a\cdot c\cdot\cos\beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c^2\cdot\cos^2\beta-a\cdot c\cdot\cos\beta=0 \Rightarrow c\cdot\cos\beta\cdot(c\cdot\cos\beta-a)=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} c=0 \text{ nema smisla} \\ \cos\beta=0 \\ c\cdot\cos\beta-a=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \cos\beta=0 \\ c\cdot\cos\beta-a=0 \end{array}\right\}.$$

Iz cos β = 0 slijedi $\beta=\frac{\pi}{2}$ pa bi stranica b trebala biti hipotenuza. Zbog uvjeta a > b to nije moguće.

Iz $c\cdot\cos\beta-a=0$ slijedi

$$c\cdot\cos\beta-a=0 \Rightarrow c\cdot\cos\beta=a \Rightarrow c\cdot\cos\beta=a \;/\cdot\frac{1}{c} \Rightarrow \cos\beta=\frac{a}{c}.$$

Sada je stranica c hipotenuza pa Pitagorin poučak glasi:

$$c^2=a^2+b^2. \;\blacksquare$$