Dokaz 1

Dokaži da je razlika dvoznamenkastog broja i broja zapisanog jednakim znamenkama, ali obrnutim poretkom, djeljiva sa 9.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj kojem je znamenka desetica a, a ≠ 0, znamenka jedinica b. Vrijedi zapis:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

Treba dokazati da je razlika

$$\overline{ab} - \overline{ba}$$

višekratnik broja 9.

$$\overline{ab} - \overline{ba} = 10 \cdot a + b - (10 \cdot b + a) = 10 \cdot a + b - 10 \cdot b - a = 9 \cdot a - 9 \cdot b = 9 \cdot (a - b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 9. ■

Dokaz 2

Dokaži da je zbroj dvoznamenkastog broja i broja zapisanog jednakim znamenkama, ali obrnutim poretkom, djeljiv sa 11.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{ab}$ dvoznamenkasti broj kojem je znamenka desetica a, a ≠ 0, znamenka jedinica b.
Vrijedi zapis:

$$\overline{ab} = 10 \cdot a + b.$$

Treba dokazati da je zbroj

$$\overline{ab} + \overline{ba}$$

višekratnik broja 11.

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 10 \cdot a + b + 10 \cdot b + a = 11 \cdot a + 11 \cdot b = 11 \cdot (a + b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 11. ■

Dokaz 3

Dokaži da je zbroj bilo kojih dvaju neparnih cijelih brojeva paran broj.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Da je proizvoljni cijeli broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in Z.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su dana dva neparna cijela broja:

$$2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot m + 1.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 1 + 2 \cdot m + 1 = 2 \cdot n + 2 \cdot m + 2 = 2 \cdot (n + m + 1).$$

Budući da je $n + m + 1$ cijeli broj, broj koji smo dobili višekratnik je broja 2. Zbroj je očigledno paran broj. ■

Dokaz 4

Dokaži da je razlika bilo kojih dvaju neparnih cijelih brojeva paran broj.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Da je proizvoljni cijeli broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in Z.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, \ 2 \cdot n, \ 3 \cdot n, \ 4 \cdot n, \ 5 \cdot n, \ 6 \cdot n, \ 7 \cdot n, \ ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su dana dva neparna cijela broja:

$$2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot m + 1.$$

Oduzmimo ih:

$$2 \cdot n + 1 - (2 \cdot m + 1) = 2 \cdot n + 1 - 2 \cdot m - 1 = 2 \cdot n + 1 - 2 \cdot m - 1 = 2 \cdot n - 2 \cdot m = 2 \cdot (n - m).$$

Budući da je $n - m$ cijeli broj, broj koji smo dobili višekratnik je broja 2. Zbroj je očigledno paran broj. ■

Dokaz 5

Dokaži da je zbroj svakih triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv sa 3.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, \ldots$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n, n+1, n+2.$$

Zbrojimo ih:

$$n + n + 1 + n + 2 = 3 \cdot n + 3 = 3 \cdot (n+1).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

2.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n-1, n, n+1.$$

Zbrojimo ih:

$$n - 1 + n + n + 1 = n - 1 + n + n + 1 = 3 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

Dokaz 6

Dokaži da je zbroj triju uzastopnih parnih cijelih brojeva djeljiv sa 6.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in Z.$$

Parni brojevi povećavaju se za 2.

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, \ 2 \cdot n, \ 3 \cdot n, \ 4 \cdot n, \ 5 \cdot n, \ 6 \cdot n, \ 7 \cdot n, \ ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna cijela broja:

$$2 \cdot n, \ 2 \cdot n + 2, \ 2 \cdot n + 4.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 + 2 \cdot n + 4 = 6 \cdot n + 6 = 6 \cdot (n + 1).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 6. ■

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna parna cijela broja:

$$2 \cdot n - 2, \ 2 \cdot n, \ 2n + 2.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n - 2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 = 2 \cdot n - 2 + 2 \cdot n + 2 \cdot n + 2 = 6 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 6. ■

Dokaz 7

Dokaži da je razlika troznamenkastog broja i broja zapisanog jednakim znamenkama, ali obrnutim poretkom, djeljiva i sa 9 i sa 11.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{abc}$ troznamenkasti broj kojem je znamenka stotica a, a ≠ 0, znamenka desetica b, a znamenka jedinica c. Vrijedi zapis:

$$\overline{abc} = 10a \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Treba dokazati da je razlika

$$\overline{abc} - \overline{cba}$$

višekratnik i broja 9 i broja 11.

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a =$$

$$= 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a = 100 \cdot a + c - 100 \cdot c - a = 99 \cdot a - 99 \cdot c =$$

$$= 99 \cdot (a - c) = 9 \cdot 11 \cdot (a - c).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je i broja 9 i broja 11. ■

Dokaz 8

Dokaži da je razlika bilo kojeg troznamenkastog broja i zbroja njegovih znamenaka djeljiva sa 9.

Teorija

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodni broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Označimo sa $\overline{abc}$ troznamenkasti broj kojem je znamenka stotica a, a $\neq 0$, znamenka desetica b, a znamenka jedinica c. Vrijedi zapis:

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c.$$

Treba dokazati da je razlika

$$\overline{abc} - (a + b + c)$$

višekratnik broja 9.

$$\overline{abc} - (a + b + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 100 \cdot a + 10 \cdot b - a - b =$$

$$= 99 \cdot a + 9 \cdot b = 9 \cdot (11 \cdot a + b).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 9. ■

Dokaz 9

Dokaži da je umnožak dvaju cijelih brojeva, od kojih je svaki zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva, također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d) = a\cdot c + a\cdot d + b\cdot c + b\cdot d.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

▶

Neka su x i y dva cijela broja od kojih je svaki zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva:

$$x = a^2 + b^2 \quad , \quad y = c^2 + d^2.$$

Njihov umnožak iznosi:

$$x\cdot y = \left(a^2 + b^2\right)\cdot\left(c^2 + d^2\right) = a^2\cdot c^2 + a^2\cdot d^2 + b^2\cdot c^2 + b^2\cdot d^2 =$$

$$= a^2\cdot c^2 + a^2\cdot d^2 + b^2\cdot c^2 + b^2\cdot d^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d - 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d =$$

$$= \left(a^2\cdot c^2 + 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d + b^2\cdot d^2\right) + \left(a^2\cdot d^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d + b^2\cdot c^2\right) =$$

$$= (a\cdot c + b\cdot d)^2 + (a\cdot d - b\cdot c)^2.$$

Dobili smo zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva. ■

Dokaz 10

Dokaži da je zbroj dvaju uzastopnih neparnih prirodnih brojeva djeljiv sa 4.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in N.$$

Neparni brojevi povećavaju se za 2.
Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, \dots$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna neparna prirodna broja:

$$2 \cdot n + 1, \ 2 \cdot n + 3.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 4 \cdot n + 4 = 4 \cdot (n+1).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 4. ■

2.inačica
Neka su zadana dva uzastopna neparna prirodna broja:

$$2 \cdot n - 1, \ 2 \cdot n + 1.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 = 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 = 4 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 4. ■

Dokaz 11

Dokaži da je kvadrat zbroja kvadrata dvaju cijelih brojeva također zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Neka su a i b cijeli brojevi. Tada kvadrat zbroja kvadrata od a i b glasi:

$$\left(a^2 + b^2\right)^2 = \left(a^2\right)^2 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + \left(b^2\right)^2 = a^4 + 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 =$$

$$= a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4 + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 = \left(a^4 - 2 \cdot a^2 \cdot b^2 + b^4\right) + 4 \cdot a^2 \cdot b^2 =$$

$$= \left(a^2 - b^2\right)^2 + (2 \cdot a \cdot b)^2 .$$

Dobili smo zbroj kvadrata dvaju cijelih brojeva. ■

Dokaz 12

Dokaži da je poluzbroj kvadrata dvaju neparnih prirodnih brojeva opet neparan broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m=2\cdot k+1\ ,\ k\in N.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

Dva neparna prirodna broja možemo zapisati kao $2\cdot a+1$ i $2\cdot b+1,\ a,\ b\in N\cup\{0\}$.

Poluzbroj njihovih kvadrata iznosi:

$$\frac{(2\cdot a+1)^2+(2\cdot b+1)^2}{2}=\frac{4\cdot a^2+4\cdot a+1+4\cdot b^2+4\cdot b+1}{2}=\frac{4\cdot a^2+4\cdot b^2+4\cdot a+4\cdot b+2}{2}=$$

$$=\frac{2\cdot\left(2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot a+2\cdot b+1\right)}{2}=\frac{2\cdot\left(2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot a+2\cdot b+1\right)}{2}=$$

$$=2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot a+2\cdot b+1=2\cdot\left(\underbrace{a^2+b^2+a+b}_{k}\right)+1=2\cdot k+1,\ k\in N.$$

Broj a^2+b^2+a+b prirodan je broj. Označimo ga, na primjer, sa k.

Dobili smo neparan broj. ■

Dokaz 13

Dokaži da kvadrat neparnog prirodnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni prirodni broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj})+1 \quad , \quad m = 2\cdot k+1\ ,\ k \in N.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2\cdot k\ ,\ k \in N.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.

Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1)\cdot n = 2\cdot k\ ,\ n \in N \setminus \{1\},\ k \in N \quad , \quad n\cdot(n+1) = 2\cdot k\ ,\ n,\ k \in N.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a = b\cdot q + r\ \text{ i }\ 0 \le r < b,\ q\ \text{ je količnik},\ r\ \text{ je ostatak}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

▶

Neparan prirodan broj, odabran po volji, možemo zapisati kao $2\cdot k+1,\ k \in N \cup \{0\}$.

Kvadriramo ga:

$$(2\cdot k+1)^2 = 4\cdot k^2 + 4\cdot k + 1 = 4\cdot k\cdot(k+1)+1 = 4\cdot \underbrace{k\cdot(k+1)}_{2\cdot n}+1 = 4\cdot 2\cdot n+1 = 8\cdot n+1.$$

Umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, $k\cdot(k+1)$, prirodan je broj djeljiv sa 2 pa možemo zapisati $k\cdot(k+1) = 2\cdot n,\ n \in N$. Time smo dokazali da kvadrat neparnog prirodnog broja pri dijeljenju sa 8 daje ostatak 1. ■

Dokaz 14

Dokaži da zbroj kvadrata dvaju uzastopnih prirodnih brojeva pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 1.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m=2\cdot k \ , \ k\in N.$$

Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1)\cdot n=2\cdot k \ , \ n,\ k\in N \quad , \quad n\cdot(n+1)=2\cdot k \ , \ n,\ k\in N.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Za prirodni broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni prirodni brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r \ \text{ i } \ 0\le r<b,\ q \ \text{ je količnik, } r \ \text{ je ostatak}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

▶

Neka su zadana dva uzastopna prirodna broja n i n + 1. Zbroj njihovih kvadrata iznosi:

$$n^2+(n+1)^2=n^2+n^2+2\cdot n+1=2\cdot n^2+2\cdot n+1=2\cdot n\cdot(n+1)+1=$$
$$=2\cdot\underbrace{n\cdot(n+1)}_{2\cdot k}+1=2\cdot 2\cdot k+1=4\cdot k+1.$$

Umnožak dvaju uzastopnih prirodnih brojeva, $n\cdot(n+1)$, prirodan je broj djeljiv sa 2 pa možemo zapisati $n\cdot(n+1)=2\cdot k,\ k\in N$. Time smo dokazali tvrdnju. ■

Dokaz 15

Dokaži da je za sve $n \in N \setminus \{1\}$ ***broj*** $n^4 + 1$ ***uvijek složen.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2 .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Preoblikujemo zadani izraz:

$$n^4 + 4 = n^4 + 4 + 4 \cdot n^2 - 4 \cdot n^2 = \left(n^4 + 4 \cdot n^2 + 4\right) - 4 \cdot n^2 = \left(n^2 + 2\right)^2 - (2 \cdot n)^2 =$$

$$= \left(n^2 + 2 - 2 \cdot n\right) \cdot \left(n^2 + 2 + 2 \cdot n\right) = \left(n^2 - 2 \cdot n + 2\right) \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 2\right).$$

Budući da je n ≠ 1, oba izraza u zagradama veća su od 1. Dakle, zadani broj je uvijek složen. ■

Dokaz 16

Dokaži da je zbroj četiriju uzastopnih neparnih cijelih brojeva djeljiv i sa 4 i sa 8.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Neparni brojevi povećavaju se za 2.

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, ...$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

1.inačica

Neka su dana četiri uzastopna neparna cijela broja:

$$2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot n + 3 \ , \ 2 \cdot n + 5 \ , \ 2 \cdot n + 7.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 + 2 \cdot n + 5 + 2 \cdot n + 7 = 8 \cdot n + 16 = 4 \cdot (2 \cdot n + 4) = 8 \cdot (n + 2).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 4 i broja 8. ■

2.inačica

Neka su dana četiri uzastopna neparna cijela broja:

$$2 \cdot n - 3 \ , \ 2 \cdot n - 1 \ , \ 2 \cdot n + 1 \ , \ 2 \cdot n + 3.$$

Zbrojimo ih:

$$2 \cdot n - 3 + 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 2 \cdot n - 3 + 2 \cdot n - 1 + 2 \cdot n + 1 + 2 \cdot n + 3 = 8 \cdot n = 4 \cdot (2 \cdot n).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 8 i broja 4. ■

Dokaz 17

Dokaži ako realni brojevi a, b, c ≠ 0 zadovoljavaju uvjet $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$ ***onda je zbroj dvaju od njih jednak nuli.***

Teorija

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Jednakost razlomaka:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \;\Leftrightarrow\; a\cdot d=b\cdot c.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m=a^{n-m}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Da bi umnožak bio jednak nuli, dovoljno je da jedan faktor bude jednak nuli.

$$a\cdot b=0 \;\Leftrightarrow\; a=0 \text{ ili } b=0 \text{ ili } a=b=0.$$

▶

Preoblikujemo zadani uvjet.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c} \;\Rightarrow\; \frac{b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b}{a\cdot b\cdot c}=\frac{1}{a+b+c} \;\Rightarrow\; (a+b+c)\cdot(b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b)=a\cdot b\cdot c \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a+b+c)\cdot(b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b)-a\cdot b\cdot c=0 \;\Rightarrow$$

(množimo i pogodno grupiramo članove)

$$\Rightarrow\; a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2+a\cdot b\cdot c-a\cdot b\cdot c=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2+a\cdot b\cdot c-a\cdot b\cdot c=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; a\cdot b\cdot c+a^2\cdot c+a^2\cdot b+b^2\cdot c+a\cdot b\cdot c+a\cdot b^2+b\cdot c^2+a\cdot c^2=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left(a\cdot b\cdot c+b^2\cdot c\right)+\left(a^2\cdot c+a\cdot b\cdot c\right)+\left(a^2\cdot b+a\cdot b^2\right)+\left(b\cdot c^2+a\cdot c^2\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; b\cdot c\cdot(a+b)+a\cdot c\cdot(a+b)+a\cdot b\cdot(a+b)+c^2\cdot(a+b)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a+b)\cdot\left(b\cdot c+a\cdot c+a\cdot b+c^2\right)=0 \;\Rightarrow\; (a+b)\cdot\left(\left(b\cdot c+c^2\right)+(a\cdot c+a\cdot b)\right)=0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; (a+b)\cdot\left(c\cdot(b+c)+a\cdot(b+c)\right)=0 \;\Rightarrow\; (a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)=0.$$

Umnožak je jednak nuli ako je a + b = 0 ili b + c = 0 ili c + a = 0. Odavde slijedi tvrdnja. ∎

Dokaz 18

Dokaži zbroj pet uzastopnih cijelih brojeva djeljiv je s 5.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Višekratnici cijelog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Cijeli broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ ...$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka je zadano pet uzastopnih cijelih brojeva:

$$n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4.$$

Zbrojimo ih:

$$n + n + 1 + n + 2 + n + 3 + n + 4 = 5 \cdot n + 10 = 5 \cdot (n + 2).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 5. ■

2.inačica
Neka je zadano pet uzastopnih cijelih brojeva:

$$n-2,\ n-1,\ n,\ n+1,\ n+2.$$

Zbrojimo ih:

$$n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 5 \cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 5. ■

Dokaz 19

Dokaži da je zbroj svake tri uzastopne potencije broja 3 djeljiv s 39.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

▶

1.inačica
Neka su dane tri uzastopne potencije broja 3:

$$3^n,\ 3^{n+1},\ 3^{n+2}.$$

Zbrojimo ih:

$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}=3^n+3^n\cdot3^1+3^n\cdot3^2=3^n\cdot\left(1+3^1+3^2\right)=3^n\cdot(1+3+9)=13\cdot3^n=$$
$$=13\cdot3^{1+n-1}=13\cdot3^1\cdot3^{n-1}=13\cdot3\cdot3^{n-1}=39\cdot3^{n-1}.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 39. ■

2.inačica
Neka su dane tri uzastopne potencije broja 3:

$$3^n,\ 3^{n+1},\ 3^{n+2}.$$

Zbrojimo ih:

$$3^n+3^{n+1}+3^{n+2}=3^{n-1+1}+3^{n-1+2}+3^{n-1+3}=3^{n-1}\cdot3^1+3^{n-1}\cdot3^2+3^{n-1}\cdot3^3=$$
$$=3^{n-1}\cdot\left(3^1+3^2+3^3\right)=3^{n-1}\cdot(3+9+27)=39\cdot3^{n-1}.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 39. ■

Dokaz 20

Dokaži da je broj n^4+n^2+1 ***složen za n > 1.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Preoblikujemo zadani izraz:

$$n^4+n^2+1=n^4+2\cdot n^2+1-n^2=\left(n^4+2\cdot n^2+1\right)-n^2=\left(n^2+1\right)^2-n^2=$$

$$=\left(n^2+1-n\right)\cdot\left(n^2+1+n\right)=\left(n^2-n+1\right)\cdot\left(n^2+n+1\right).$$

Budući da je n > 1, oba izraza u zagradama veća su od 1. Dakle, zadani broj je uvijek složen. ■

Dokaz 21

Dokaži da je kompozicija dviju linearnih funkcija f i g komutativna, tj. da vrijedi f ∘ g = g ∘ f za svake dvije linearne funkcije f i g.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C.$

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C,$ odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa g ∘ f. Dakle,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ za sve } a \in A.$$

▶

Neka su zadane dvije linearne funkcije:

$$f(x) = a \cdot x \quad , \quad g(x) = b \cdot x.$$

Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = a \cdot g(x) = a \cdot b \cdot x \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = b \cdot f(x) = b \cdot a \cdot x = a \cdot b \cdot x \end{array}\right\} \Rightarrow f \circ g = g \circ f. \ \blacksquare$$

Dokaz 22

Dokaži da za kompoziciju afinih funkcija općenito ne vrijedi zakon komutativnosti.

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x + b,\ a,\ b \in R,\ a \neq 0$ naziva se afina funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C$.

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C$, odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa g ∘ f. Dakle,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \text{ za sve } a \in A.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su zadane dvije afine funkcije:

$$f(x) = a \cdot x + b \quad , \quad g(x) = c \cdot x + d.$$

Tada je:

$$\left.\begin{array}{l} (f \circ g)(x) = f(g(x)) = a \cdot g(x) + b = a \cdot (c \cdot x + d) + b = a \cdot c \cdot x + a \cdot d + b \\ (g \circ f)(x) = g(f(x)) = c \cdot f(x) + d = c \cdot (a \cdot x + b) + d = c \cdot a \cdot x + c \cdot b + d = a \cdot c \cdot x + b \cdot c + d \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad f \circ g \neq g \circ f. \ ■$$

Dokaz 23

Dokaži da za svaku linearnu funkciju $f(x) = a \cdot x$ ***vrijedi*** $f(c \cdot x) = c \cdot f(x)$, ***pri čemu je c proizvoljni realni broj.***

Teorija

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x,\ a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Svojstvo komutativnosti:

$$a \cdot b = b \cdot a, \text{ za sve } a, b \in R.$$

Svojstvo asocijativnosti:

$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \text{ za sve } a, b, c \in R.$$

▶

Neka je zadana linearna funkcija:

$$f(x) = a \cdot x.$$

Tada vrijedi:

$$f(c \cdot x) = a \cdot (c \cdot x) = (a \cdot c) \cdot x = (c \cdot a) \cdot x = c \cdot (a \cdot x) = c \cdot f(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 24

Dokaži da za linearnu funkciju $f(x)=a\cdot x$ ***općenito vrijedi*** $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$.

Teorija

Funkcija $f: R\to R$ dana pravilom $f(x)=a\cdot x,\ a\in R\setminus\{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Neka je zadana linearna funkcija:

$$f(x)=a\cdot x.$$

Tada vrijedi:

$$f(x_1+x_2)=a\cdot(x_1+x_2)=a\cdot x_1+a\cdot x_2=f(x_1)+f(x_2).\ \blacksquare$$

Dokaz 25

Dokaži identitet: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=a\cdot b.$

Teorija

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Oduzimanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}-\frac{b}{n}=\frac{a-b}{n}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

▶

1.inačica

Slijeve strane obavimo naznačeno kvadriranje pa zatim oduzimanje.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}-\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}-\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-\left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)}{4}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2-a^2+2\cdot a\cdot b-b^2}{4}=\frac{4\cdot a\cdot b}{4}=\frac{4\cdot a\cdot b}{4}=a\cdot b. \ \blacksquare$$

2.inačica

Uočimo da je izraz na lijevoj strani razlika kvadrata.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\left(\frac{a+b}{2}-\frac{a-b}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2}\right)=\frac{a+b-(a-b)}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=$$

$$=\frac{a+b-a+b}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{a+b-a+b}{2}\cdot\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{2\cdot b}{2}\cdot\frac{2\cdot a}{2}=\frac{2\cdot b}{2}\cdot\frac{2\cdot a}{2}=b\cdot a=a\cdot b.\ \blacksquare$$

Dokaz 26

Dokaži identitet: $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{2}.$

Teorija

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

▶

Slijeve strane obavimo naznačeno kvadriranje pa zatim zbrajanje.

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(\frac{a-b}{2}\right)^2=\frac{(a+b)^2}{2^2}+\frac{(a-b)^2}{2^2}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4}+\frac{a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=\frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot b+b^2}{4}=$$

$$=\frac{2\cdot a^2+2\cdot b^2}{4}=\frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)}{4}=\frac{2\cdot\left(a^2+b^2\right)}{4}=\frac{a^2+b^2}{2}. \ ■$$

Dokaz 27

Dokaži identitet: $\left(k\cdot x+k\cdot y\right)^2=k^2\cdot\left(x+y\right)^2$.

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot\left(b+c\right)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot\left(b+c\right).$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=\left(a\cdot b\right)^n \quad , \quad \left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$\left(a+b\right)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=\left(a+b\right)^2.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

▶

1.inačica

$$\left(k\cdot x+k\cdot y\right)^2=\left(k\cdot x\right)^2+2\cdot k\cdot x\cdot k\cdot y+\left(k\cdot y\right)^2=$$

$$=k^2\cdot x^2+2\cdot k^2\cdot x\cdot y+k^2\cdot y^2=k^2\cdot\left(x^2+2\cdot x\cdot y+y^2\right)=k^2\cdot\left(x+y\right)^2. \blacksquare$$

2.inačica

$$\left(k\cdot x+k\cdot y\right)^2=\left(k\cdot\left(x+y\right)\right)^2=k^2\cdot\left(x+y\right)^2. \blacksquare$$

Dokaz 28

Dokaži da je razlika kvadrata dvaju uzastopnih cijelih brojeva neparan broj.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki cijeli broj}) + 1 \quad , \quad m = 2 \cdot k + 1 \ , \ k \in Z.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1.$$

Njihova razlika kvadrata iznosi:

$$(n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = n^2 + 2 \cdot n + 1 - n^2 = 2 \cdot n + 1. \ ■$$

2.inačica
Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1.$$

Njihova razlika kvadrata iznosi:

$$(n+1)^2 - n^2 = (n+1-n) \cdot (n+1+n) = (n+1-n) \cdot (n+1+n) = 1 \cdot (2 \cdot n + 1) = 2 \cdot n + 1. \ ■$$

Dokaz 29

Dokaži ako umnošku dvaju uzastopnih cijelih brojeva dodamo veći od njih, dobit ćemo kvadrat većeg broja.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1.$$

Njihovu umnošku dodamo veći od njih:

$$n \cdot (n+1) + (n+1) = (n+1) \cdot (n+1) = (n+1)^2. \ ■$$

2.inačica
Neka su zadana dva uzastopna cijela broja:

$$n-1, \ n.$$

Njihovu umnošku dodamo veći od njih:

$$(n-1) \cdot n + n = n \cdot (n-1+1) = n \cdot (n-1+1) = n \cdot n = n^2. \ ■$$

Dokaz 30

Dokaži da zbroj kvadrata tri uzastopna cijela broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 2.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Za cijeli broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b, \ q \ \text{ je količnik, } r \ \text{ je ostatak}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1, \ n+2.$$

Zbrojimo njihove kvadrate:

$$n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = n^2 + n^2 + 2 \cdot n + 1 + n^2 + 4 \cdot n + 4 = 3 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 5 =$$

$$= 3 \cdot n^2 + 6 \cdot n + 3 + 2 = 3 \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 1\right) + 2 = 3 \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + 1\right) + 2. \ \blacksquare$$

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n-1, \ n, \ n+1.$$

Zbrojimo njihove kvadrate:

$$(n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 = n^2 - 2 \cdot n + 1 + n^2 + n^2 + 2 \cdot n + 1 = n^2 - 2 \cdot n + 1 + n^2 + n^2 + 2 \cdot n + 1 =$$

$$= 3 \cdot n^2 + 2 = 3 \cdot n^2 + 2. \ \blacksquare$$

Dokaz 31

Dokaži da kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Za cijeli broj a i prirodni broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b,\ q \ \text{ je količnik},\ r \ \text{ je ostatak}.$$

Svaki se cijeli broj a za proizvoljni prirodni broj b može prikazati u jednom od oblika:

$$a = b \cdot q,$$
$$a = b \cdot q + 1,$$
$$a = b \cdot q + 2,$$
$$\ldots$$
$$a = b \cdot q + (b-1).$$

Na primjer, ako je b = 3, onda svaki broj a dopušta prikaz u jednom od ova tri oblika:

$$a = 3 \cdot q,$$
$$a = 3 \cdot q + 1,$$
$$a = 3 \cdot q + 2.$$

Ili ovako:

$$a = 3 \cdot q - 1,$$
$$a = 3 \cdot q,$$
$$a = 3 \cdot q + 1.$$

▶

1.inačica
Prvi način dokazivanja tvrdnje.
Kvadrirajmo brojeve:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\cdot q \\ a=3\cdot q+1 \\ a=3\cdot q+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{kvadriranje}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=(3\cdot q)^2 \\ a^2=(3\cdot q+1)^2 \\ a^2=(3\cdot q+2)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=9\cdot q^2 \\ a^2=(3\cdot q)^2+2\cdot 3\cdot q\cdot 1+1 \\ a^2=(3\cdot q)^2+2\cdot 3\cdot q\cdot 2+2^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot 3\cdot q^2 \\ a^2=9\cdot q^2+6\cdot q+1 \\ a^2=9\cdot q^2+12\cdot q+4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right) \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \\ a^2=9\cdot q^2+12\cdot q+3+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+4\cdot q+1\right)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+4\cdot q+1\right)+1 \end{array}\right\}. \blacksquare$$

2.inačica

Drugi način dokazivanja tvrdnje.
Kvadrirajmo brojeve:

$$\left.\begin{array}{l} a=3\cdot q-1 \\ a=3\cdot q \\ a=3\cdot q+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\text{kvadriranje}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=(3\cdot q-1)^2 \\ a^2=(3\cdot q)^2 \\ a^2=(3\cdot q+1)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=(3\cdot q)^2-2\cdot 3\cdot q\cdot 1+1 \\ a^2=9\cdot q^2 \\ a^2=(3\cdot q)^2+2\cdot 3\cdot q\cdot 1+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=9\cdot q^2-6\cdot q+1 \\ a^2=3\cdot 3\cdot q^2 \\ a^2=9\cdot q^2+6\cdot q+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2-2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right) \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2-2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2-2\cdot q\right)+1 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2\right)+0 \\ a^2=3\cdot\left(3\cdot q^2+2\cdot q\right)+1 \end{array}\right\}. \blacksquare$$

Dokaz 32

Dokaži iz jednakosti $a^2+b^2+c^2=a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c\ (a,\ b,\ c\in R)$, ***slijedi*** $a=b=c$.

Teorija

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\geq 0\ ,\ a\in R.$$

▶

Preoblikujemo jednakost:

$$a^2+b^2+c^2=a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c \Rightarrow a^2+b^2+c^2=a\cdot b+b\cdot c+a\cdot c\ /\cdot 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2=2\cdot a\cdot b+2\cdot b\cdot c+2\cdot a\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2+2\cdot c^2-2\cdot a\cdot b-2\cdot b\cdot c-2\cdot a\cdot c=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}\text{grupiramo}\\ \text{članove}\end{bmatrix} \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2+a^2-2\cdot a\cdot c+c^2+b^2-2\cdot b\cdot c+c^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\right)+\left(a^2-2\cdot a\cdot c+c^2\right)+\left(b^2-2\cdot b\cdot c+c^2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2=0.$$

Izrazi

$$(a-b)^2,\ (a-c)^2,\ (b-c)^2$$

nenegativni su, a njihov zbroj jednak je 0.
Zato mora biti

$$a-b=0\ ,\ a-c=0\ ,\ b-c=0$$

odnosno

$$a=b\ ,\ a=c\ ,\ b=c,$$

tj.

$$a=b=c.\ \blacksquare$$

Dokaz 33

Dokaži ako je proizvoljni cijeli broj oblika $2\cdot a^2+b^2,\ a,\ b\in Z,$ ***onda je i njegov kvadrat tog oblika.***

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}\qquad \text{ili}\qquad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

▶

Neka je cijeli broj n oblika:

$$n=2\cdot a^2+b^2.$$

Kvadriramo ga:

$$n=2\cdot a^2+b^2\ \Rightarrow\ n=2\cdot a^2+b^2\ /^2\ \Rightarrow\ n^2=\left(2\cdot a^2+b^2\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n^2=\left(2\cdot a^2\right)^2+2\cdot 2\cdot a^2\cdot b^2+\left(b^2\right)^2\ \Rightarrow\ n^2=4\cdot a^4+4\cdot a^2\cdot b^2+b^4\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n^2=4\cdot a^4-4\cdot a^2\cdot b^2+b^4+8\cdot a^2\cdot b^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n^2=\left(4\cdot a^4-4\cdot a^2\cdot b^2+b^4\right)+2\cdot\left(4\cdot a^2\cdot b^2\right)\ \Rightarrow\ n^2=\left(2\cdot a^2-b^2\right)^2+2\cdot(2\cdot a\cdot b)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ n^2=2\cdot(2\cdot a\cdot b)^2+\left(2\cdot a^2-b^2\right)^2\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{zamjena}\\ 2\cdot a\cdot b=c\in Z\\ 2\cdot a^2-b^2=d\in Z\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ n^2=2\cdot c^2+d^2.\ \blacksquare$$

Dokaz 34

Dokaži da je svaka stranica trokuta manja od polovice njegova opsega.

Teorija

Opseg trokuta računa se po formuli

$$O = a + b + c,$$

gdje su a, b i c duljine njegovih stranica.

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c < b + c.$$

Znak nejednakosti mijenja se ako obje njezine strane pomnožimo (ili podijelimo) istim negativnim realnim brojem.

$$\left.\begin{matrix} a > b \\ a \geq b \\ a < b \\ a \leq b \end{matrix}\right\} \Rightarrow [\, c < 0 \,] \Rightarrow \left.\begin{matrix} a \cdot c < b \cdot c \\ a \cdot c \leq b \cdot c \\ a \cdot c > b \cdot c \\ a \cdot c \geq b \cdot c \end{matrix}\right\}.$$

Nejednakost trokuta:

$$a < b + c \quad , \quad b < a + c \quad , \quad c < a + b.$$

(duljina svake stranice trokuta manja je od zbroja duljina njegovih ostalih stranica)

▶

Dokažimo tvrdnju!

$$\left.\begin{matrix} a < b + c \\ b < a + c \\ c < a + b \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < b + c \ / + a \\ b < a + c \ / + b \\ c < a + b \ / + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a + a < b + c + a \\ b + b < a + c + b \\ c + c < a + b + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a < a + b + c \\ 2 \cdot b < a + b + c \\ 2 \cdot c < a + b + c \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 2 \cdot a < a + b + c \ /: 2 \\ 2 \cdot b < a + b + c \ /: 2 \\ 2 \cdot c < a + b + c \ /: 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a < \frac{a+b+c}{2} \\ b < \frac{a+b+c}{2} \\ c < \frac{a+b+c}{2} \end{matrix}\right\}. \ \blacksquare$$

Dokaz 35

Dokaži umnožak dvaju uzastopnih parnih prirodnih brojeva djeljiv je s 8.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.
Da je proizvoljni prirodni broj m paran znači da se može napisati u obliku

$$m = 2 \cdot (\text{neki prirodan broj}) \quad , \quad m = 2 \cdot k \ , \ k \in N.$$

Parni brojevi rastu za 2.
Umnožak dva susjedna prirodna broja (brojevi se razlikuju za 1) uvijek je paran broj (djeljiv s 2).

$$(n-1) \cdot n = 2 \cdot k \ , \ n \in N \setminus \{1\},\ k \in N \quad , \quad n \cdot (n+1) = 2 \cdot k \ , \ n,\ k \in N.$$

Za prirodni broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica
Neka su zadana dva uzastopna parna prirodna broja:

$$2 \cdot n,\ 2 \cdot n + 2.$$

Pomnožimo ih:

$$2 \cdot n \cdot (2 \cdot n + 2) = 2 \cdot n \cdot 2 \cdot (n+1) = 4 \cdot n \cdot (n+1) = \begin{bmatrix} \text{zamjena} \\ n \cdot (n+1) = 2 \cdot k \in N \end{bmatrix} = 4 \cdot 2 \cdot k = 8 \cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 8. ∎

2.inačica
Od dva uzastopna parna prirodna broja jedan je djeljiv sa 4. Zato je umnožak sigurno djeljiv s 8. ∎

Dokaz 36

Dokaži za svaki $n \in N$ broj $n^3 - n$ djeljiv je sa 6.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b) \quad , \quad (a-b) \cdot (a+b) = a^2 - b^2.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n, 2 \cdot n, 3 \cdot n, 4 \cdot n, 5 \cdot n, 6 \cdot n, 7 \cdot n, \ldots$

Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 6. Barem jedan od faktora je paran (djeljiv s 2), a jedan je djeljiv sa 3. Zato je njihov umnožak djeljiv sa 6.

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 6 \cdot k \ , \ k \in N \quad , \quad (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 6 \cdot k \ , \ k \in N.$$

▶

Preoblikujemo zadani broj:

$$n^3 - n = n \cdot \left(n^2 - 1\right) = n \cdot (n-1) \cdot (n+1) = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 6 \cdot k \ , \ k \in N \end{array} \right] = 6 \cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 6. ■

Dokaz 37

Dokaži zbroj kubova triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 3.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prethodnik prirodnog broja n, n ≠ 1, je prirodan broj n – 1.
Sljedbenik prirodnog broja n je prirodan broj n + 1.
Kub zbroja:

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3.$$

Kub razlike:

$$(a-b)^3=a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3 \quad , \quad a^3-3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2-b^3=(a-b)^3.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

▶

1.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n,\ n+1,\ n+2.$$

Zbrojimo njihove kubove:

$$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=$$
$$=n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1+n^3+3\cdot n^2\cdot 2+3\cdot n\cdot 2^2+2^3=$$
$$=n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1+n^3+6\cdot n^2+12\cdot n+8=3\cdot n^3+9\cdot n^2+15\cdot n+9=$$
$$=3\cdot\left(n^3+3\cdot n^2+5\cdot n+3\right).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

2.inačica
Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja:

$$n-1,\ n,\ n+1.$$

Zbrojimo njihove kubove:

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=n^3-3\cdot n^2+3\cdot n-1+n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=$$
$$=n^3-3\cdot n^2+3\cdot n-1+n^3+n^3+3\cdot n^2+3\cdot n+1=3\cdot n^3+6\cdot n=3\cdot\left(n^3+2\cdot n\right).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 3. ■

Dokaz 38

Dokaži ako za realne brojeve a, b, x i y vrijedi $a^2+b^2=1$ i $x^2+y^2=1$, ***onda je*** $a\cdot x+b\cdot y\le 1$.

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\ge 0\ ,\ a\in R.$$

Svojstvo nejednakosti (zbrajanje):

$$a\ge b \text{ i } c\ge d\ \Rightarrow\ a+c\ge b+d.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Znak nejednakosti mijenja se ako obje njezine strane podijelimo (ili pomnožimo) istim negativnim realnim brojem.

$$\left.\begin{matrix} a>b\\ a\ge b\\ a<b\\ a\le b\end{matrix}\right\}\Rightarrow\ [\,c<0\,]\ \Rightarrow\ \left.\begin{matrix} \frac{a}{c}<\frac{b}{c}\\ \frac{a}{c}\le\frac{b}{c}\\ \frac{a}{c}>\frac{b}{c}\\ \frac{a}{c}\ge\frac{b}{c}\end{matrix}\right\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Za realne brojeve a, b, x i y sljedeće su nejednakosti uvijek istinite:

$$(a-x)^2\ge 0\ ,\ (b-y)^2\ge 0.$$

Zbrojimo ih:

$$(a-x)^2+(b-y)^2\ge 0\ \Rightarrow\ a^2-2\cdot a\cdot x+x^2+b^2-2\cdot b\cdot y+y^2\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{metoda}\\ \text{grupiranja}\end{bmatrix}\ \Rightarrow\ \left(a^2+b^2\right)+\left(x^2+y^2\right)-2\cdot a\cdot x-2\cdot b\cdot y\ge 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left(a^2+b^2\right)+\left(x^2+y^2\right)-2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge 0\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix}\text{uvjeti}\\ a^2+b^2=1\\ x^2+y^2=1\end{bmatrix}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1+1-2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge 0\ \Rightarrow\ 2-2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge 0\ \Rightarrow\ -2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge -2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -2\cdot(a\cdot x+b\cdot y)\ge -2\ /:(-2)\ \Rightarrow\ a\cdot x+b\cdot y\le 1.\ \blacksquare$$

Dokaz 39

Dokaži da je umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva koji su djeljivi s 3 djeljiv sa 162.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.

Na primjer, višekratnici broja n su: $1 \cdot n,\ 2 \cdot n,\ 3 \cdot n,\ 4 \cdot n,\ 5 \cdot n,\ 6 \cdot n,\ 7 \cdot n,\ \ldots$

Umnožak triju uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv je sa 6. Barem jedan od faktora je paran (djeljiv s 2), a jedan je djeljiv sa 3. Zato je njihov umnožak djeljiv sa 6.

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N \quad , \quad (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

1.inačica

Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja koji su djeljivi s 3:

$$3 \cdot n,\ 3 \cdot n + 3,\ 3 \cdot n + 6.$$

Pomnožimo ih:

$$3 \cdot n \cdot (3 \cdot n + 3) \cdot (3 \cdot n + 6) = 3 \cdot n \cdot 3 \cdot (n+1) \cdot 3 \cdot (n+2) = 27 \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N \end{array} \right] = 27 \cdot 6 \cdot k = 162 \cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 162. ■

2.inačica

Neka su zadana tri uzastopna prirodna broja koji su djeljivi s 3:

$$3 \cdot n - 3,\ 3 \cdot n,\ 3 \cdot n + 3.$$

Pomnožimo ih:

$$(3 \cdot n - 3) \cdot 3 \cdot n \cdot (3 \cdot n + 3) = 3 \cdot (n-1) \cdot 3 \cdot n \cdot 3 \cdot (n+1) = 27 \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{zamjena} \\ (n-1) \cdot n \cdot (n+1) = 6 \cdot k \ ,\ k \in N \end{array} \right] = 27 \cdot 6 \cdot k = 162 \cdot k.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 162. ■

3.inačica

Od tri uzastopna prirodna broja djeljiva s 3 jedan je djeljiv sa 6, a jedan s 9. Stoga je umnožak djeljiv s $3 \cdot 6 \cdot 9 = 162.$ ■

Dokaz 40

Dokaži ako umnošku tri uzastopna cijela broja dodamo srednji broj dobit ćemo kub srednjeg broja.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Prethodnik cijelog broja n je cijeli broj n – 1.
Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.
Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

▶

1.inačica
Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n,\ n+1,\ n+2.$$

Pomnožimo ih i dodajmo srednji broj:

$$n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+(n+1)=(n+1)\cdot(n\cdot(n+2)+1)=(n+1)\cdot\left(n^2+2\cdot n+1\right)=$$

$$=(n+1)\cdot(n+1)^2=(n+1)^3.\ \blacksquare$$

2.inačica
Neka su zadana tri uzastopna cijela broja:

$$n-1,\ n,\ n+1.$$

Pomnožimo ih i dodajmo srednji broj:

$$(n-1)\cdot n\cdot(n+1)+n=n\cdot((n-1)\cdot(n+1)+1)=n\cdot\left(n^2-1+1\right)=n\cdot\left(n^2-1+1\right)=n\cdot n^2=n^3.\ \blacksquare$$

Dokaz 41

Dokaži da je za svaki prirodni broj n broj $(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-7)-(n+1)\cdot(n-1)$ ***djeljiv s 5.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q \quad \text{ili} \quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \dots$

▶

Pojednostavnimo izraz:

$$(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-7)-(n+1)\cdot(n-1)=6\cdot n^2-14\cdot n+9\cdot n-21-\left(n^2-1\right)=$$

$$=6\cdot n^2-14\cdot n+9\cdot n-21-n^2+1=5\cdot n^2-5\cdot n-20=5\cdot\left(n^2-n-4\right).$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 5. ■

Dokaz 42

Dokaži da je broj $(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-2)-(3\cdot n+2)\cdot(2\cdot n-3)$ ***djeljiv s 10 za svaki prirodni broj n.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m}\quad,\quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b (b ≠ 0) ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q\quad \text{ili}\quad a:b=q.$$

Višekratnici prirodnog broja su svi brojevi koji su djeljivi s tim brojem. Prirodan broj ima beskonačno višekratnika.
Na primjer, višekratnici broja n su: $1\cdot n,\ 2\cdot n,\ 3\cdot n,\ 4\cdot n,\ 5\cdot n,\ 6\cdot n,\ 7\cdot n,\ \ldots$

▶

Pojednostavnimo izraz:

$$(2\cdot n+3)\cdot(3\cdot n-2)-(3\cdot n+2)\cdot(2\cdot n-3)=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-\left(6\cdot n^2-9\cdot n+4\cdot n-6\right)=$$

$$=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-6\cdot n^2+9\cdot n-4\cdot n+6=6\cdot n^2-4\cdot n+9\cdot n-6-6\cdot n^2+9\cdot n-4\cdot n+6=$$

$$=-4\cdot n+9\cdot n+9\cdot n-4\cdot n=10\cdot n.$$

Broj koji smo dobili višekratnik je broja 10. ■

Dokaz 43

Dokaži nejednakost $-|x| \le x \le |x|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

▶

Nejednakost

$$-|x| \le x \le |x|$$

možemo zapisati pomoću dvije nejednakosti:

$$-|x| \le x \quad , \quad x \le |x|.$$

Provjerimo nejednakost

$$-|x| \le x.$$

♥ $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$

Nejednakost

$$-|x| \le x$$

postaje

$$-x \le x.$$

Ona je istinita.

♥ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Nejednakost

$$-|x| \le x$$

postaje

$$-(-x) \le x \Rightarrow x \le x.$$

Ona je istinita.

Provjerimo nejednakost

$$x \le |x|.$$

♥ $x \ge 0 \Rightarrow |x| = x$

Nejednakost

$$x \le |x|$$

postaje

$$x \le x.$$

Ona je istinita.

♥ $x < 0 \Rightarrow |x| = -x$

Nejednakost

$$x \le |x|$$

postaje

$$x \leq -x.$$

Ona je istinita. ■

Dokaz 44

Dokaži nejednakost $|a+b| \le |a| + |b|.$

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj $-x$ koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstva apsolutne vrijednosti:

$$-|a| \le a \le |a| \quad , \quad -a \le x \le a \Rightarrow |x| \le a.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \text{ i } c \le d \Rightarrow a + c \le b + d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

Neka je

$$-|a| \le a \le |a| \quad , \quad -|b| \le b \le |b|.$$

Poslije zbrajanja dobije se:

$$\left.\begin{array}{l} -|a| \le a \le |a| \\ -|b| \le b \le |b| \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow -|a| - |b| \le a + b \le |a| + |b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -(|a| + |b|) \le a + b \le |a| + |b| \Rightarrow |a+b| \le |a| + |b|.$$

Ako su brojevi jednakog predznaka vrijedi jednakost. ■

Dokaz 45

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$

Teorija

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\geq b \ , \ c>0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}.$$

Umnožak cijelog broja i racionalnog broja:

$$a\cdot\frac{b}{c}=\frac{a\cdot b}{c}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n\neq 0 \ , \ n\neq 1.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \ , \ a, b\geq 0.$$

Kvadriranje drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \ , \ a\geq 0.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2\geq 0 \ , \ a\in R.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

▶

1.inačica

Pođimo od istinite tvrdnje:

$$(a-b)^2\geq 0 \ \Rightarrow \ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \ \Rightarrow \ a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \ /\cdot\frac{1}{a\cdot b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a^2}{a\cdot b}-2\cdot\frac{a\cdot b}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{a^2}{a\cdot b}-2\cdot\frac{a\cdot b}{a\cdot b}+\frac{b^2}{a\cdot b}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b}-2\cdot 1+\frac{b}{a}\geq 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\geq 0 \ \Rightarrow \ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. ■

2.inačica

Pođimo od istinite nejednakosti:

$$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}+\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^2 \geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}-2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}-2\cdot\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}+\frac{b}{a}\geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}-2\cdot\sqrt{1}+\frac{b}{a}\geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}-2\cdot 1+\frac{b}{a}\geq 0 \Rightarrow \frac{a}{b}-2+\frac{b}{a}\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. ■

3.inačica

Pretpostavimo da je zadana nejednakost točna. Korektnim matematičkim postupcima preoblikujemo je u tvrdnju za koju smo sigurni da je valjana.

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \;/\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2+b^2\geq 2\cdot a\cdot b \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\geq 0 \Rightarrow (a-b)^2\geq 0.$$

Dobili smo istinitu tvrdnu. Znači vrijedi

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je a = b. ■

Dokaz 46

Dokaži da za sve $x \in R$ ***vrijedi*** $x^2 + x + 1 > 0.$

Teorija

Umnožak racionalnog broja i njegova recipročnog broja:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

▶

Preoblikujemo nejednakost nadopunjavanjem na potpuni kvadrat:

$$x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0.$$

Zadana nejednakost je točna jer je

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ i } \frac{3}{4} > 0. \ ■$$

Dokaz 47

Dokaži, ako je $a+b+c=0$***, onda je*** $a^3+b^3+c^3=3\cdot a\cdot b\cdot c.$

Teorija

Potencija sa negativnom bazom i neparnim eksponentom:

$$(-a)^{2\cdot n+1}=-a^{2\cdot n+1}.$$

Kub zbroja:

$$(a+b)^3=a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3 \quad , \quad a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3=(a+b)^3.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n:a^m=a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$a^3+b^3+c^3=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b\end{array}\right]=a^3+b^3+(-a-b)^3=a^3+b^3+(-(a+b))^3=$$

$$=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-\left(a^3+3\cdot a^2\cdot b+3\cdot a\cdot b^2+b^3\right)=$$

$$=a^3+b^3-a^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2-b^3=a^3+b^3-a^3-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2-b^3=$$

$$=-3\cdot a^2\cdot b-3\cdot a\cdot b^2=3\cdot a\cdot b\cdot(-a-b)=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b+c=0 \Rightarrow c=-a-b\end{array}\right]=3\cdot a\cdot b\cdot c. \blacksquare$$

Dokaz 48

Dokaži: $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}.$

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a + c \le b + c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \; / + 1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} + 1 \le \frac{c}{d} + 1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} + \frac{1}{1} \le \frac{c}{d} + \frac{1}{1} \;\Rightarrow\; \frac{a+b}{b} \le \frac{c+d}{d}. \;\blacksquare$$

Dokaz 49

Dokaži: $\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a-b}{b} \le \frac{c-d}{d}.$

Teorija

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \text{ i } c \in R \;\Rightarrow\; a - c \le b - c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

▶

$$\frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} \le \frac{c}{d} \;/ -1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} - 1 \le \frac{c}{d} - 1 \;\Rightarrow\; \frac{a}{b} - \frac{1}{1} \le \frac{c}{d} - \frac{1}{1} \;\Rightarrow\; \frac{a-b}{b} \le \frac{c-d}{d}. \;\blacksquare$$

Dokaz 50

Dokaži da za sve realne brojeve a i b vrijedi: $|a-b| \le |a|+|b|.$

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|-a| = |a|.$$

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|a+b| \le |a|+|b| \text{ za svaki } a, b \in R.$$

▶

$$|a-b| = |a+(-b)| \le |a|+|-b| = |a|+|b| \Rightarrow |a-b| \le |a|+|b|. \blacksquare$$

Dokaz 51

Dokaži da za sve realne brojeve a i b vrijedi: $|a|-|b|\le|a+b|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x|=\begin{cases} x, & x\ge 0 \\ -x, & x<0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x\ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|-a|=|a|.$$

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|a+b|\le|a|+|b| \text{ za svaki } a, b\in R.$$

▶

$$|a|=|a+b-b|=|(a+b)+(-b)|\le|a+b|+|-b|=|a+b|+|b| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |a|\le|a+b|+|b| \Rightarrow |a|-|b|\le|a+b|. ■$$

Dokaz 52

Dokaži da za sve realne brojeve a i b vrijedi: $|a|-|b| \le |a-b|$.

Teorija

Za realni broj x njegova je apsolutna vrijednost (modul) broj $|x|$ koji određujemo na ovaj način:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Ako je broj x pozitivan ili nula, tada je on jednak svojoj apsolutnoj vrijednosti. Za svaki x, $x \ge 0$, vrijedi $|x| = x$.

Ako je x negativan broj, njegova apsolutna vrijednost je suprotan broj – x koji je pozitivan. Za svaki x, $x < 0$, je $|x| = -x$.

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|-a| = |a|.$$

Svojstvo apsolutne vrijednosti:

$$|a+b| \le |a| + |b| \text{ za svaki } a, b \in R.$$

▶

$$|a| = |a-b+b| = |(a-b)+b| \le |a-b| + |b| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |a| \le |a-b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \le |a-b|. \blacksquare$$

Dokaz 53

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi: $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a \cdot b}.$

Napomena. Broj $\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$ ***zove se harmonijska sredina, a broj*** $\sqrt{a \cdot b}$ ***geometrijska sredina brojeva a i b.***

Teorija

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Dvojni razlomak:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a \cdot d}{b \cdot c}.$$

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a \ , \ a \ge 0.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n}=\frac{a}{b} \ , \ n \ne 0 \ , \ n \ne 1.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a \cdot c \le b \cdot c.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}=\sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b}=\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2 \cdot a \cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2 \cdot a \cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

▶

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \le \sqrt{a \cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{2}{\frac{b+a}{a \cdot b}} \le \sqrt{a \cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{\frac{2}{1}}{\frac{a+b}{a \cdot b}} \le \sqrt{a \cdot b} \ \Rightarrow \ \frac{2 \cdot a \cdot b}{a+b} \le \sqrt{a \cdot b} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2}{a+b} \le \sqrt{a\cdot b} \Rightarrow \frac{2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2}{a+b} \le \sqrt{a\cdot b} \;/\cdot \frac{1}{\sqrt{a\cdot b}} \Rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{a+b} \le 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2\cdot\sqrt{a\cdot b}}{a+b} \le 1 \;/\cdot\left(a+b\right) \Rightarrow 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \le a+b \Rightarrow a+b \ge 2\cdot\sqrt{a\cdot b} \Rightarrow a-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+b \ge 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \Rightarrow \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \ge 0. \;\blacksquare$$

Dokaz 54

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi: $\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2}$.

Napomena. Broj $\sqrt{a \cdot b}$ ***zove se geometrijska sredina, a broj*** $\frac{a+b}{2}$ ***aritmetička sredina brojeva a i b.***

Teorija

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \le b \; , \; c > 0 \; \Rightarrow \; a \cdot c \le b \cdot c.$$

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \; , \; a \ge 0.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \quad , \quad \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \ge 0 \; , \; a \in R.$$

▶

$$\sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \; \Rightarrow \; \sqrt{a \cdot b} \le \frac{a+b}{2} \; / \cdot 2 \; \Rightarrow \; 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \le a + b \; \Rightarrow \; a + b \ge 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} \; \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; a - 2 \cdot \sqrt{a \cdot b} + b \ge 0 \; \Rightarrow \; \left(\sqrt{a}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \left(\sqrt{b}\right)^2 \ge 0 \; \Rightarrow \; \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \ge 0. \; \blacksquare$$

Dokaz 55

Dokaži da za realne brojeve a, b > 0 vrijedi: $\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Napomena. Broj $\frac{a+b}{2}$ ***zove se aritmetička sredina, a broj*** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ***kvadratna sredina brojeva a i b.***

Teorija

Kvadriranje nejednakosti pozitivnih brojeva:

$$0 < a \le b \Rightarrow a^2 \le b^2.$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = a \ , \ a \ge 0.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a \le b \ , \ c > 0 \Rightarrow a\cdot c \le b\cdot c.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c) = a\cdot b + a\cdot c \quad , \quad a\cdot b + a\cdot c = a\cdot(b+c).$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja:

$$a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

▶

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow \frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ /^2 \Rightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \le \left(\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(a+b)^2}{2^2} \le \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow \frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+2\cdot a\cdot b+b^2}{4} \le \frac{a^2+b^2}{2} \ /\cdot 4 \Rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \le 2\cdot\left(a^2+b^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \le 2\cdot a^2+2\cdot b^2 \Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2 \ge a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot a^2+2\cdot b^2-a^2-2\cdot a\cdot b-b^2 \ge 0 \Rightarrow a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \ge 0 \Rightarrow (a-b)^2 \ge 0. \ \blacksquare$$

Dokaz 56

Dokaži ako su a, b, c pozitivni brojevi, onda je $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9.$

Teorija

Za svaka dva pozitivna broja x i y vrijedi:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2.$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a\geq b \text{ i } c\geq d \;\Rightarrow\; a+c\geq b+d.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n} \quad , \quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\geq b \text{ i } c\in R \;\Rightarrow\; a+c\geq b+c.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1}=n.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Polazimo od istinitih nejednakosti:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\\ \frac{b}{c}+\frac{c}{b}\geq 2\\ \frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\text{zbrojimo}\\ \text{nejednakosti}\end{array}\right]\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{b}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\geq 2+2+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{a}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\geq 6 \Rightarrow \left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{a}{c}\right)\geq 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}\geq 6 \Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}\geq 6 \;/+3 \Rightarrow \frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+a}{c}+3\geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+\frac{b+c}{a}+1+\frac{a+c}{b}+1+\frac{b+a}{c}\geq 9 \Rightarrow \left(1+\frac{b+c}{a}\right)+\left(1+\frac{a+c}{b}\right)+\left(1+\frac{b+a}{c}\right)\geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{1}+\frac{b+c}{a}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{a+c}{b}\right)+\left(\frac{1}{1}+\frac{b+a}{c}\right)\geq 9 \Rightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{b+a+c}{b}+\frac{c+b+a}{c}\geq 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\geq 9 \Rightarrow (a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9. \;\blacksquare$$

Dokaz 57

Dokaži da je umnožak četiri uzastopna cijela broja uvećan za 1 potpuni kvadrat.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Sljedbenik cijelog broja n je cijeli broj n + 1.

Množenje zagrada:

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

▶

Neka su zadana četiri uzastopna cijela broja:

$$n, \ n+1, \ n+2, \ n+3.$$

Njihov umnožak uvećamo za 1:

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) + 1 = n \cdot (n+3) \cdot (n+1) \cdot (n+2) + 1 = \left(n^2 + 3 \cdot n\right) \cdot \left(n^2 + 2 \cdot n + n + 2\right) + 1 =$$

$$= \left(n^2 + 3 \cdot n\right) \cdot \left(n^2 + 3 \cdot n + 2\right) + 1 = \left(n^2 + 3 \cdot n\right) \cdot \left(\left(n^2 + 3 \cdot n\right) + 2\right) + 1 =$$

$$= \left(n^2 + 3 \cdot n\right)^2 + 2 \cdot \left(n^2 + 3 \cdot n\right) + 1 = \left(n^2 + 3 \cdot n + 1\right)^2. \ \blacksquare$$

Dokaz 58

Dokaži ako su a i b pozitivni brojevi i a + b = 1, onda je $\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9.$

Teorija

Kvadrat drugog korijena:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\ \ ,\ \ a\geq 0.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadriranje nejednakosti pozitivnih brojeva:

$$a\geq b>0\ \Rightarrow\ a^2\geq b^2.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n\quad ,\quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a\geq b\ \text{i}\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c\geq b\cdot c.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ \ ,\ \ n\neq 0\ \ ,\ \ n\neq 1.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Zbrajanje razlomaka jednakih nazivnika:

$$\frac{a}{n}+\frac{b}{n}=\frac{a+b}{n}\quad ,\quad \frac{a+b}{n}=\frac{a}{n}+\frac{b}{n}.$$

▶

Pođimo od točne nejednakosti:

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow\ \left(\sqrt{a}\right)^2-2\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}+\left(\sqrt{b}\right)^2\geq 0\ \Rightarrow\ a-2\cdot\sqrt{a\cdot b}+b\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a+b\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b=1\end{array}\right]\ \Rightarrow\ 1\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ \Rightarrow\ 1\geq 2\cdot\sqrt{a\cdot b}\ /^2\ \Rightarrow\ 1^2\geq\left(2\cdot\sqrt{a\cdot b}\right)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 1\geq 2^2\cdot\left(\sqrt{a\cdot b}\right)^2\ \Rightarrow\ 1\geq 4\cdot a\cdot b\ \Rightarrow\ 1\geq 4\cdot a\cdot b\ /\cdot\frac{1}{a\cdot b}\ \Rightarrow\ \frac{1}{a\cdot b}\geq 4.$$

Sada je:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a\cdot b}=1+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{a\cdot b}=1+\frac{a+b}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot b}=\left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ a+b=1\end{array}\right]=$$

$$=1+\frac{1}{a\cdot b}+\frac{1}{a\cdot b}=1+\frac{2}{a\cdot b}=1+2\cdot\frac{1}{a\cdot b}\geq\left[\frac{1}{a\cdot b}\geq 4\right]\geq 1+2\cdot 4=1+8=9.$$

Vrijedi:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{b}\right)\geq 9.\ \blacksquare$$

Dokaz 59

Dokaži ako je a > 0, b > 0 i c > 0 i $a^2+b^2=c^2$, ***tada je*** $a^3+b^3<c^3$.

Teorija

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a<b \text{ i } c>0 \ \Rightarrow \ a\cdot c<b\cdot c.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Zbrajanje nejednakosti:

$$a<b \text{ i } c<d \ \Rightarrow \ a+c<b+d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

Zbog $a^2+b^2=c^2$ i $a>0,\ b>0$ vrijedi $a<c$ i $b<c$.

Tada je:

$$\left.\begin{matrix} a<c \\ b<c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a<c \ /\cdot a^2 \\ b<c \ /\cdot b^2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} a^3<a^2\cdot c \\ b^3<b^2\cdot c \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{zbrojimo} \\ \text{nejednkosti} \end{matrix}\right] \Rightarrow a^3+b^3<a^2\cdot c+b^2\cdot c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^3+b^3<\left(a^2+b^2\right)\cdot c \Rightarrow \left[\begin{matrix} \text{uvjet} \\ a^2+b^2=c^2 \end{matrix}\right] \Rightarrow a^3+b^3<c^2\cdot c \Rightarrow a^3+b^3<c^3. \ \blacksquare$$

Dokaz 60

Dokaži ako je $x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=1$, ***onda je*** $x^2+y^2+z^2\geq 1$.

Teorija

Kvadrat realnog broja:

$$a^2\geq 0\ ,\ a\in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2\quad ,\quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Dijeljenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a\geq b \text{ i } c>0\ \Rightarrow\ \frac{a}{c}\geq\frac{b}{c}.$$

▶

Polazimo od istinite nejednakosti:

$$(x-y)^2+(z-x)^2+(y-z)^2\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ x^2-2\cdot x\cdot y+y^2+z^2-2\cdot z\cdot x+x^2+y^2-2\cdot y\cdot z+z^2\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot x^2+2\cdot y^2+2\cdot z^2-2\cdot x\cdot y-2\cdot z\cdot x-2\cdot y\cdot z\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\cdot(x\cdot y+z\cdot x+y\cdot z)\geq 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\cdot(x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x)\geq 0\ \Rightarrow\ \left[\begin{array}{c}\text{uvjet}\\ x\cdot y+y\cdot z+z\cdot x=1\end{array}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\cdot 1\geq 0\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)-2\geq 0\ \Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\ /:2\ \Rightarrow\ x^2+y^2+z^2\geq 1.\ \blacksquare$$