5

241 300

Dokaz 241

Dokaži $a^4+b^4=\left(a^2-a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right)\cdot\left(a^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right).$

Teorija

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Drugi korijen:

$$\sqrt{a^2}=a \ , \ a\geq 0.$$

Množenje drugih korijena:

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{a\cdot b} \quad , \quad \sqrt{a\cdot b}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} \ , \ a,\, b\geq 0.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

▶

$$a^4+b^4=a^4+2\cdot a^2\cdot b^2+b^4-2\cdot a^2\cdot b^2=\left(a^2\right)^2+2\cdot a^2\cdot b^2+\left(b^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot b^2=$$

$$=\left(a^2+b^2\right)^2-2\cdot a^2\cdot b^2=\left(a^2+b^2\right)^2-\left(a\cdot b\cdot\sqrt{2}\right)^2=$$

$$=\left(a^2+b^2-a\cdot b\cdot\sqrt{2}\right)\cdot\left(a^2+b^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2}\right)=\left(a^2-a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right)\cdot\left(a^2+a\cdot b\cdot\sqrt{2}+b^2\right). \ \blacksquare$$

Dokaz 242

Dokažite Stewartov poučak. Neka je $D \in \overline{AB}$ ***po volji odabrana točka trokuta ABC. Označimo*** $t = |CD|$, $u = |AD|$, $v = |BD|$. ***Onda vrijedi*** $a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot c + u \cdot v \cdot c.$

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Poučak o kosinusu (kosinusov poučak)
U trokutu ABC vrijede ove jednakosti:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma.$$

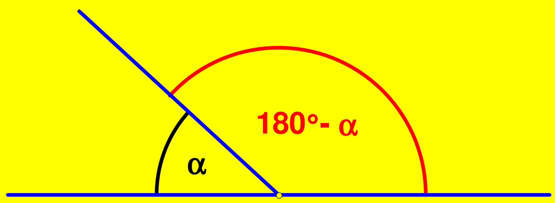
Zbrajanje jednakosti:

$$a = b \text{ i } c = d \;\Rightarrow\; a + c = b + d.$$

Formula redukcije za kosinus:

$$\cos\left(180^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha.$$

Suplementarni kutovi, kutovi čiji zbroj iznosi 180°.



Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

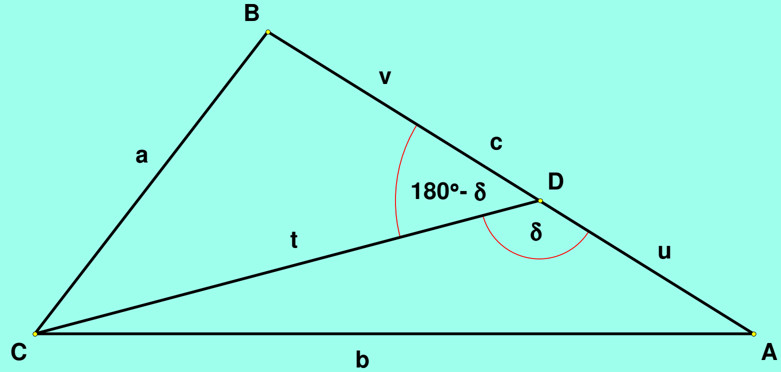
Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot \left(b + c\right) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot \left(b + c\right).$$

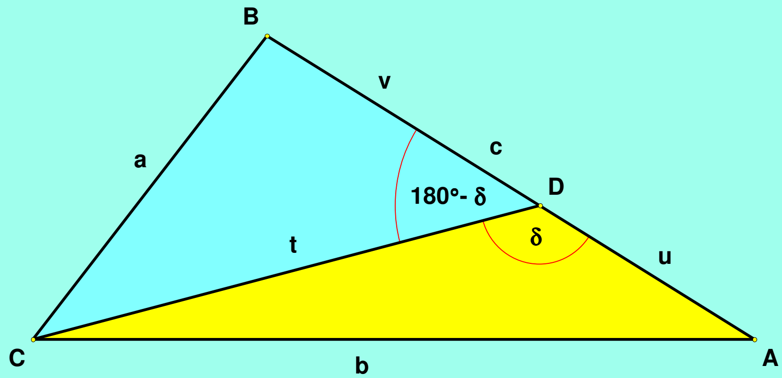
▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = c \;,\; |BC| = a \;,\; |CA| = b \;,\; |CD| = t \;,\; |AD| = u \;,\; |BD| = v \;,\; c = u + v$$

$$\angle ADC = \delta \ , \ \angle CDB = 180^{\circ} - \delta$$



Uočimo trokute ΔCAD i ΔCDB. Prema poučku o kosinusu slijedi

$$\left.\begin{array}{l} b^2 = t^2 + u^2 - 2 \cdot t \cdot u \cdot \cos\delta \\ a^2 = t^2 + v^2 - 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos\left(180^{\circ} - \delta\right) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 = t^2 + u^2 - 2 \cdot t \cdot u \cdot \cos\delta \\ a^2 = t^2 + v^2 + 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos\delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 = t^2 + u^2 - 2 \cdot t \cdot u \cdot \cos\delta \ / \cdot v \\ a^2 = t^2 + v^2 + 2 \cdot t \cdot v \cdot \cos\delta \ / \cdot u \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b^2 \cdot v = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v - 2 \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \cos\delta \\ a^2 \cdot u = t^2 \cdot u + v^2 \cdot u + 2 \cdot t \cdot v \cdot u \cdot \cos\delta \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot v + a^2 \cdot u = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v - 2 \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \cos\delta + t^2 \cdot u + v^2 \cdot u + 2 \cdot t \cdot v \cdot u \cdot \cos\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot v + a^2 \cdot u = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v - 2 \cdot t \cdot u \cdot v \cdot \cos\delta + t^2 \cdot u + v^2 \cdot u + 2 \cdot t \cdot v \cdot u \cdot \cos\delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b^2 \cdot v + a^2 \cdot u = t^2 \cdot v + u^2 \cdot v + t^2 \cdot u + v^2 \cdot u \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot v + t^2 \cdot u + u^2 \cdot v + v^2 \cdot u \Rightarrow a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot (v + u) + u \cdot v \cdot (u + v) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\, u + v = c \,\right] \Rightarrow a^2 \cdot u + b^2 \cdot v = t^2 \cdot c + u \cdot v \cdot c. \ \blacksquare$$

Dokaz 243

Dokažite četverokut koji je istodobno tetivni i tangencijalni ima površinu $P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}$.

Teorija

Četverokut je dio ravnine omeđen sa četiri dužine. Konveksni četverokuti su četverokuti kojima su svi kutovi manji od 180°. Četverokut je zatvoren geometrijski lik koji ima četiri kuta i četiri stranice.

Tetivni četverokut je četverokut oko kojeg se može opisati kružnica. Njegove stranice su tetive jedne kružnice, tj. vrhovi mu leže na jednoj te istoj kružnici

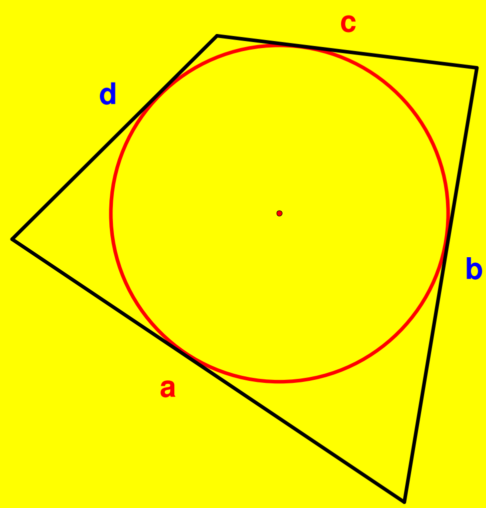
Heronova formula za površinu tetivnog četverokuta

$$P = \sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)},$$

gdje su a, b, c, d duljine stanica, s poluopseg četverokuta

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Tangencijalni četverokut je konveksni četverokut kojemu se može upisati kružnica. U tangencijalnom je četverokutu zbroj duljina jednog para nasuprotnih stranica jednak zbroju duljina drugog para nasuprotnih stranica.



$$a + c = b + d.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n = \frac{n}{1} \quad , \quad \frac{n}{1} = n.$$

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

Budući da je četverokut tangencijalni vrijedi:

$$a + c = b + d.$$

Sada je:

$$♥\ s-a=\frac{a+b+c+d}{2}-a=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{a}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot a}{2}=\frac{b+c+d-a}{2}=$$

$$=\frac{b+d+c-a}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{a+c+c-a}{2}=\frac{a+c+c-a}{2}=\frac{2\cdot c}{2}=\frac{2\cdot c}{2}=c$$

$$♥\ s-b=\frac{a+b+c+d}{2}-b=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{b}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot b}{2}=\frac{a+c+d-b}{2}=$$

$$=\frac{a+c+d-b}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{b+d+d-b}{2}=\frac{b+d+d-b}{2}=\frac{2\cdot d}{2}=\frac{2\cdot d}{2}=d$$

$$♥\ s-c=\frac{a+b+c+d}{2}-c=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{c}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot c}{2}=\frac{a+b+d-c}{2}=$$

$$=\frac{b+d+a-c}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{a+c+a-c}{2}=\frac{a+c+a-c}{2}=\frac{2\cdot a}{2}=\frac{2\cdot a}{2}=a$$

$$♥\ s-d=\frac{a+b+c+d}{2}-d=\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{d}{1}=\frac{a+b+c+d-2\cdot d}{2}=\frac{a+b+c-d}{2}=$$

$$=\frac{a+c+b-d}{2}=\left[\,a+c=b+d\,\right]=\frac{b+d+b-d}{2}=\frac{b+d+b-d}{2}=\frac{2\cdot b}{2}=\frac{2\cdot b}{2}=b.$$

Tvrdnja slijedi uporabom Heronove formule.

$$P=\sqrt{(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)\cdot(s-d)}\ \Rightarrow\ \begin{bmatrix} s-a=c \\ s-b=d \\ s-c=a \\ s-d=b \end{bmatrix}\ \Rightarrow\ P=\sqrt{c\cdot d\cdot a\cdot b}\ \Rightarrow\ P=\sqrt{a\cdot b\cdot c\cdot d}.\ ■$$

Dokaz 244

Dokažite da za površinu bilo kojeg trokuta vrijedi:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma \ , \ P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin \alpha \ , \ P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta.$$

Teorija

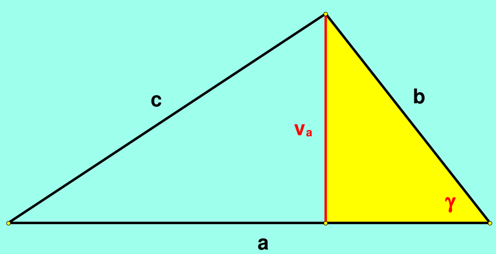
Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Ploština trokuta izračunava se po formulama:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot v_b \quad , \quad P = \frac{1}{2} \cdot c \cdot v_c.$$

Ploština trokuta jednaka je polovici produkta duljine jedne njegove stranice i duljine visine koja odgovara toj stranici.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Sinus šiljastog kuta pravokutnog trokuta jednak je omjeru duljine katete nasuprot tog kuta i duljine hipotenuze.

▶

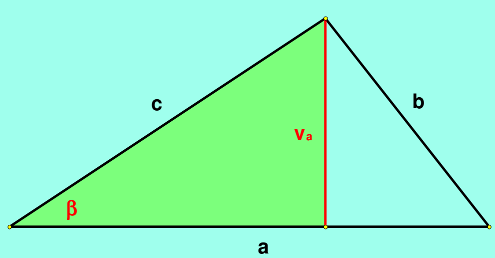
♥



$$\sin \gamma = \frac{v_a}{b} \Rightarrow \frac{v_a}{b} = \sin \gamma \Rightarrow \frac{v_a}{b} = \sin \gamma \ / \cdot b \Rightarrow v_a = b \cdot \sin \gamma \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma.$$

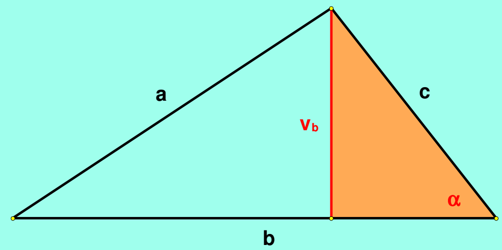
♥



$$\sin \beta = \frac{v_a}{c} \Rightarrow \frac{v_a}{c} = \sin \beta \Rightarrow \frac{v_a}{c} = \sin \beta \ / \cdot c \Rightarrow v_a = c \cdot \sin \beta \Rightarrow \left[P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot v_a \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot c \cdot \sin \beta.$$

♥



$$\sin\alpha = \frac{v_b}{c} \;\Rightarrow\; \frac{v_b}{c} = \sin\alpha \;\Rightarrow\; \frac{v_b}{c} = \sin\alpha \;/\cdot\, c \;\Rightarrow\; v_b = c\cdot\sin\alpha \;\Rightarrow\; \left[\, P = \frac{1}{2}\cdot b\cdot v_b \,\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; P = \frac{1}{2}\cdot b\cdot c\cdot\sin\alpha. \;\blacksquare$$

Dokaz 245

Dokažite da je broj log 5 iracionalan.

Teorija

Logaritam broja a po bazi b je broj c kojim treba potencirati bazu b da se dobije broj a.
Mnemotehničko pravilo za pamćenje osnovne veze eksponencijalne i logaritamske funkcije:

$$\log_b a = c \qquad \log_b a = b^c \qquad a = b^c$$

Dekadski logaritam

Logaritamska funkcija log10 označava se simbolom log. Broj log x zovemo dekadski, Briggsov ili obični logaritam.

$$\log_{10} x = \log x.$$

Racionalni broj je broj koji nastaje dijeljenjem dva cijela broja. To su svi negativni razlomci, nula i pozitivni razlomci. Svaki razlomak možemo zapisati u obliku $\frac{a}{b}$, gdje je a cijeli broj, a b prirodni broj.

Iracionalni brojevi su oni brojevi koje ne možemo zapisati u obliku razlomaka.

Potenciranje potencije:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

Pretpostavimo da vrijedi suprotno da je broj log 5 racionalan broj, tj. da se može zapisati u obliku

$$\log 5 = \frac{m}{n},$$

gdje su m i n prirodni brojevi. Onda je

$$\log 5 = \frac{m}{n} \Rightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 5 \Rightarrow 10^{\frac{m}{n}} = 5 \ / ^n \Rightarrow \left(10^{\frac{m}{n}}\right)^n = 5^n \Rightarrow 10^m = 5^n.$$

Ova jednakost nije valjana ni za koji prirodan broj m i n. Stoga je pretpostavka iz koje je dobivena jednakost proistekla pogrešna, što znači da log 5 nije racionalan broj. ■

Dokaz 246

Dokažite da je $x+\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$.

Teorija

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad a=\left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

▶

$$x+\sqrt{x^2-1}=\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{1}\cdot\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\cdot\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=$$

$$=\frac{x^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-\left(x^2-1\right)}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{x^2-x^2+1}{x-\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}.\ ■$$

Dokaz 247

Dokažite $(a\cdot b+c\cdot d)^2=\left(a^2+c^2\right)\cdot\left(b^2+d^2\right)\Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c.$

Teorija

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n \quad , \quad (a\cdot b)^n=a^n\cdot b^n.$$

Množenje zagrada

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2=a^2+2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2+2\cdot a\cdot b+b^2=(a+b)^2.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

▶

$$(a\cdot b+c\cdot d)^2=\left(a^2+c^2\right)\cdot\left(b^2+d^2\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a\cdot b)^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+(c\cdot d)^2=a^2\cdot b^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+c^2\cdot d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\cdot b^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+c^2\cdot d^2=a^2\cdot b^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+c^2\cdot d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\cdot b^2+2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+c^2\cdot d^2=a^2\cdot b^2+a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2+c^2\cdot d^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d=a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2 \Leftrightarrow a^2\cdot d^2+b^2\cdot c^2=2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2\cdot d^2-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+b^2\cdot c^2=0 \Leftrightarrow (a\cdot d)^2-2\cdot a\cdot b\cdot c\cdot d+(b\cdot c)^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (a\cdot d-b\cdot c)^2=0 \Leftrightarrow a\cdot d-b\cdot c=0 \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c.\ \blacksquare$$

Dokaz 248

Dokažite da je zbroj prvih 1000 prirodnih brojeva djeljiv sa 77.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a=b\cdot q.$$

Zbroj prvih n prirodnih brojeva

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n\cdot(n+1)}{2}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

▶

1.inačica

$$1+2+3+\ldots+1000=\frac{1000\cdot(1000+1)}{2}=\frac{1000\cdot 1001}{2}=\frac{1000\cdot 1001}{2}=500\cdot 1001=$$
$$=500\cdot 77\cdot 13=77\cdot 6500.\ \blacksquare$$

2.inačica

Brojeve od 1 do 1000 nećemo zbrajati redom kako su napisani, nego ćemo ih udružiti u parove.

$$1+2+3+\ldots+998+999+1000=(1+1000)+(2+999)+(3+998)+\ldots+(500+501).$$

Uočite da ima 500 parova i da je zbroj brojeva svakog para 1001. Dakle, zbroj prvih 1000 prirodnih brojeva je

$$1001\cdot 500=77\cdot 13\cdot 500=77\cdot 6500.\ \blacksquare$$

Dokaz 249

Dokažite da je broj $10^{1990} - 10$ djeljiv s 81.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Prirodni je broj djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

▶

$$10^{1990} - 10 = 1\underbrace{000\ \ldots\ 000}_{1990\ nula} - 10 = 1000\ \ldots\ 000 - 10 = \underbrace{999\ \ldots\ 999}_{1989\ devetki}0 = 999\ \ldots\ 9990 =$$

$$= 9 \cdot 111\ \ldots\ 1110 = 9 \cdot \underbrace{111\ \ldots\ 111}_{1989\ jedinica}0.$$

Uočite da je broj 111…1110 (1989 jedinica) djeljiv s 9 jer je njegov zbroj znamenaka djeljiv s 9.

$$111\ \ldots\ 1110 \ \rightarrow \ \underbrace{1+1+1+\ \ldots\ +1+1+1}_{1989\ jedinica}+0 = 1898 = 9 \cdot 221.$$

Dakle, broj $10^{1990} - 10 = 9 \cdot 111\ldots1110$ djeljiv je s 81. ■

Dokaz 250

Dokažite da je $2^{10} + 5^{12}$ složen broj.

Teorija

Potenciranje potencija:

$$\left(a^{n}\right)^{m}=\left(a^{m}\right)^{n}=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^{n}\right)^{m}=\left(a^{m}\right)^{n}.$$

Svojstvo potencije:

$$a^{1}=a \quad , \quad a=a^{1}.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^{2}=a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2} \quad , \quad a^{2}+2\cdot a\cdot b+b^{2}=(a+b)^{2}.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^{n}\cdot b^{n}=(a\cdot b)^{n} \quad , \quad (a\cdot b)^{n}=a^{n}\cdot b^{n}.$$

Razlika kvadrata:

$$a^{2}-b^{2}=(a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b)=a^{2}-b^{2}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**
Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

▶

$$2^{10}+5^{12}=\left(2^{5}\right)^{2}+\left(5^{6}\right)^{2}=\left(2^{5}\right)^{2}+2\cdot2^{5}\cdot5^{6}+\left(5^{6}\right)^{2}-2\cdot2^{5}\cdot5^{6}=\left(2^{5}+5^{6}\right)^{2}-2^{1}\cdot2^{5}\cdot5^{6}=$$

$$=\left(2^{5}+5^{6}\right)^{2}-2^{6}\cdot5^{6}=\left(2^{5}+5^{6}\right)^{2}-(2\cdot5)^{6}=\left(2^{5}+5^{6}\right)^{2}-10^{6}=$$

$$=\left(2^{5}+5^{6}\right)^{2}-\left(10^{3}\right)^{2}=\left(2^{5}+5^{6}-10^{3}\right)\cdot\left(2^{5}+5^{6}+10^{3}\right)=$$

$$=(32+15625-1000)\cdot(32+15625+1000)=14657\cdot16657. \ ■$$

Dokaz 251

Dokazati da se između bilo kojih 11 prirodnih brojeva uvijek mogu izabrati dva broja kojima je razlika djeljiva s 10.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni je broj djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0.

Dekadski brojevni sustav je sustav s brojevnom bazom 10, što znači da ima 10 znamenki:
0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

▶

Između bilo kojih 11 prirodnih brojeva postoje barem dva broja koji završavaju jednakim znamenkama (njih ima točno 10). Razlika ta dva broja završava nulom, tj. djeljiva je s 10. ■

Dokaz 252

Dokazati translacijom točke x brojevnog pravca najprije za usmjerenu dužinu pridruženu broju a, a zatim za usmjerenu dužinu pridruženu broju b dobiva se ista točka kao kada se točka x translatira za usmjerenu dužinu pridruženu broju a + b.

Teorija

Translacija je preslikavanje euklidskoga prostora na sebe, pri kojemu se točka T preslikava u točku T′ tako da je vektor TT′ = a jednak za sve točke prostora.

Svojstvo udruživanja (asocijativnosti):

$$(a+b)+c=a+(b+c), \text{ za sve } a, b, c\in R.$$

▶

Translacijom točke x za a dobiva se x + a. Translacijom x + a za b dobiva se (x + a) + b.

Sada je

$$(x + a) + b = x + (a + b)$$

što znači da se x translatira za a + b. ■

Dokaz 253

Dokaži da je $\frac{1}{n+1}$ ***između*** $\frac{1}{n+2}$ i $\frac{1}{n}$ ***za svaki prirodni broj n.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Svojstva nejednakosti:

$$a > b > 0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad , \quad a < b \ \text{ i } \ b < c \;\Rightarrow\; a < c.$$

▶

$$\left.\begin{array}{l} n+2 > n+1 \\ n+1 > n \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}. \blacksquare$$

Dokaz 254

Dokaži ako su a i b racionalni brojevi i a < b, onda postoji pozitivan racionalan broj c takav da je b = a + c.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo napisati u obliku razlomaka, tj. m / n, gdje je m cijeli broj, koji zovemo brojnikom, a n je prirodan broj, koji nazivamo nazivnikom.

$$Q = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in Z,\ n \in N \right\}.$$

Svojstva nejednakosti:

$$a < b\ ,\ c > 0\ \Rightarrow\ a \cdot c < b \cdot c \quad , \quad a > b\ ,\ c > 0\ \Rightarrow\ a \cdot c > b \cdot c.$$

Zbrajanje razlomaka:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b}\ ,\ n \neq 0\ ,\ n \neq 1.$$

▶

Stavimo

$$a = \frac{m}{n} \text{ i } b = \frac{p}{q}\ \left(m,\ p \in Z \text{ i } n,\ q \in N\right)$$

i tada

$$a < b\ \Rightarrow\ \frac{m}{n} < \frac{p}{q}\ \Rightarrow\ \frac{m}{n} < \frac{p}{q}\ / \cdot n \cdot q\ \Rightarrow\ m \cdot q < p \cdot n\ \Rightarrow\ p \cdot n > m \cdot q\ \Rightarrow\ p \cdot n - m \cdot q > 0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ p \cdot n - m \cdot q > 0\ / \cdot \frac{1}{n \cdot q}\ \Rightarrow\ \frac{p \cdot n - m \cdot q}{n \cdot q} > 0.$$

Ako stavimo

$$c = \frac{p \cdot n - m \cdot q}{n \cdot q}$$

vidimo da je b = a + c. Uvjerimo se!

$$b = a + c\ \Rightarrow\ \frac{p}{q} = \frac{m}{n} + \frac{p \cdot n - m \cdot q}{n \cdot q}\ \Rightarrow\ \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + p \cdot n - m \cdot q}{n \cdot q}\ \Rightarrow\ \frac{p}{q} = \frac{m \cdot q + p \cdot n - m \cdot q}{n \cdot q}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{n \cdot q}\ \Rightarrow\ \frac{p}{q} = \frac{p \cdot n}{n \cdot q}\ \Rightarrow\ \frac{p}{q} = \frac{p}{q}.\ ■$$

Dokaz 255

Dokaži da je za afinu funkciju $f(x)=a\cdot x+b \; (b\neq 0) \; f(c\cdot x)\neq c\cdot f(x)$ ***za bilo koji racionalni broj c.***

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Afina funkcija je oblika

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)=a_1\cdot x_1+a_2\cdot x_2+a_3\cdot x_3+\ldots+a_n\cdot x_n+b.$$

Za n = 1 afina se funkcija može zapisati kao f(x) = a · x + b, koja se u nastavi matematike naziva linearnom i u pravilu se dodaje uvjet a ≠ 0.

▶

$$\left.\begin{array}{l} f(c\cdot x)=a\cdot(c\cdot x)+b \\ c\cdot f(x)=c\cdot(a\cdot x+b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(c\cdot x)=a\cdot c\cdot x+b \\ c\cdot f(x)=a\cdot c\cdot x+b\cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow f(c\cdot x)\neq c\cdot f(x). \blacksquare$$

Dokaz 256

Dokaži da je za afinu funkciju $f(x) = a \cdot x + b \ (b \neq 0)$ $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$ ***za bilo koje racionalne brojeve*** x_1 ***i*** x_2.

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Afina funkcija je oblika

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 + \ldots + a_n \cdot x_n + b.$$

Za n = 1 afina se funkcija može zapisati kao f(x) = a · x + b, koja se u nastavi matematike naziva linearnom i u pravilu se dodaje uvjet a ≠ 0.

▶

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1 + x_2) = a \cdot (x_1 + x_2) + b \\ f(x_1) + f(x_2) = a \cdot x_1 + b + a \cdot x_2 + b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_1 + x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2 + b \\ f(x_1) + f(x_2) = a \cdot x_1 + a \cdot x_2 + 2 \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2). \ \blacksquare$$

Dokaz 257

Dokaži da je funkcija obrnute proporcionalnosti $f(x)=\frac{a}{x}$ ***padajuća funkcija na skupu Q⁺.***

Teorija

Racionalni brojevi su brojevi koje možemo napisati u obliku razlomaka, tj. m / n, gdje je m cijeli broj, koji zovemo brojnikom, a n je prirodan broj, koji nazivamo nazivnikom.

$$Q=\left\{\frac{m}{n}\mid m\in Z,\, n\in N\right\}.$$

Simbol za skup pozitivnih racionalnih brojeva

$$Q^{+}.$$

Svojstva nejednakosti:

$$0<a<b\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}>\frac{1}{b}\quad,\quad a>b\ ,\ c>0\ \Rightarrow\ a\cdot c>b\cdot c.$$

Funkcija f je padajuća (silazna funkcija, monotono padajuća funkcija) na intervalu A ⊆ D ako

$$\left(\forall x_1,\, x_2\in A\right)\ x_1<x_2\ \Rightarrow\ f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right).$$

▶

$$0<x_1<x_2\ \Rightarrow\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\ \Rightarrow\ \left[\,a>0\,\right]\ \Rightarrow\ \frac{1}{x_1}>\frac{1}{x_2}\ /\cdot a\ \Rightarrow\ \frac{a}{x_1}>\frac{a}{x_2}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \left[\ f(x)=\frac{a}{x}\ \right]\ \Rightarrow\ f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right).\ \blacksquare$$

Dokaz 258

Dokaži zbroj dvaju uzastopnih neparnih cijelih brojeva djeljiv je s 4.

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z=\{\ldots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3,\ \ldots\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b ($b \neq 0$) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Cijeli brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

Da je proizvoljni cijeli broj m neparan znači da se može napisati u obliku

$$m=2\cdot(\text{neki cijeli broj})+1 \quad , \quad m=2\cdot k+1\ ,\ k\in Z.$$

Neparni brojevi rastu za 2.

▶

1.inačica

Neka su zadana dva uzastopna neparna cijela broja:

$$2\cdot n+1\ ,\ 2\cdot n+3,\ n\in Z.$$

Zbroj tih brojeva jednak je:

$$2\cdot n+1+2\cdot n+3=4\cdot n+4=4\cdot(n+1),\ n+1\in Z.$$

2.inačica

Neka su zadana dva uzastopna neparna cijela broja:

$$2\cdot n-1\ ,\ 2\cdot n+1,\ n\in Z.$$

Zbroj tih brojeva jednak je:

$$2\cdot n-1+2\cdot n+1=2\cdot n-1+2\cdot n+1=2\cdot n+2\cdot n=4\cdot n,\ n\in Z.\ ■$$

Dokaz 259

Zbroj f + g dviju funkcija $f,\ g : R \rightarrow R$ ***definira se s*** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. ***Dokaži zbroj dviju parnih funkcija je parna funkcija.***

Teorija

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo parnom, ako je f(– x) = f(x).

▶

Neka su f, g parne funkcije.

$$f(-x) = f(x) \ , \ g(-x) = g(x).$$

Tada je

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f+g)(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 260

Zbroj f + g dviju funkcija $f, g : R \to R$ ***definira se s*** $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$. ***Dokaži zbroj dviju neparnih funkcija je neparna funkcija.***

Teorija

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo neparnom, ako je

$$f(-x) = -f(x).$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Neka su f, g neparne funkcije.

$$f(-x) = -f(x) \ , \ g(-x) = -g(x).$$

Tada je

$$(f+g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f(x) + g(x)) = -(f+g)(x). \ ■$$

Dokaz 261

Umnožak $f \cdot g$ ***dviju funkcija*** $f, g : R \to R$ ***definira se s*** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$***. Dokaži umnožak dviju parnih funkcija je parna funkcija.***

Teorija

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo parnom, ako je f(– x) = f(x).

▶

Neka su f, g parne funkcije.

$$f(-x) = f(x) \;\;,\;\; g(-x) = g(x).$$

Tada je

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x). \;\blacksquare$$

Dokaz 262

Umnožak* $f \cdot g$ *dviju funkcija* $f, g : R \to R$ *definira se s* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$. *Dokaži umnožak dviju neparnih funkcija je parna funkcija.

Teorija

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo neparnom, ako je

$$f(-x) = -f(x).$$

▶

Neka su f, g neparne funkcije.

$$f(-x) = -f(x) \ , \ g(-x) = -g(x).$$

Tada je

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = (-f(x)) \cdot (-g(x)) = f(x) \cdot g(x) = (f \cdot g)(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 263

Umnožak f · g dviju funkcija $f,\ g : R \to R$ ***definira se s*** $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$***. Dokaži umnožak parne i neparne funkcije je neparna funkcija.***

Teorija

Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo parnom, ako je f(– x) = f(x).
Funkciju y = f(x) definiranu u simetričnom području – a ≤ x ≤ a nazivamo neparnom, ako je f(– x) = – f(x).

▶

Neka je f parna, a g neparne funkcija.

$$f(-x) = f(x) \ \ , \ \ g(-x) = -g(x).$$

Tada je

$$(f \cdot g)(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -f(x) \cdot g(x) = -(f \cdot g)(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 264

Dokažite da za funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$ ***vrijedi jednakost*** $f(x)-f(x+1)=f(x)\cdot f(x+1)$.

Teorija

Oduzimanje razlomaka:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

▶

$$f(x)-f(x+1)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{x+1-x}{x\cdot(x+1)}=\frac{x+1-x}{x\cdot(x+1)}=\frac{1}{x\cdot(x+1)}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x+1}=f(x)\cdot f(x+1).\ \blacksquare$$

Dokaz 265

Dokažite da za x > 0 vrijedi nejednakost $x^2+4^x+1-x\cdot 2^{x+1}>0.$

Teorija

Svojstvo potencije:

$$a^1=a \quad , \quad a=a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n\cdot a^m=a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m}=a^n\cdot a^m.$$

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2=a^2-2\cdot a\cdot b+b^2 \quad , \quad a^2-2\cdot a\cdot b+b^2=(a-b)^2.$$

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2\ge 0 \ , \ a\in R.$$

▶

$$x^2+4^x+1-x\cdot 2^{x+1}=4^x-x\cdot 2^{x+1}+x^2+1=\left(2^2\right)^x-x\cdot 2^x\cdot 2^1+x^2+1=$$

$$=\left(2^x\right)^2-2\cdot 2^x\cdot x+x^2+1=\left(2^x-x\right)^2+1>0. \ ■$$

Dokaz 266

Dokažite da je umnožak prvih n prostih brojeva paran broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n, n+1, \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Najmanji prost broj je 2.
Parni brojevi su djeljivi s dva.
Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

▶

Umnožak prvih n prostih brojeva je paran broj jer je među njima broj 2. ■

Dokaz 267

Dokažite da je $m \cdot n \cdot (m+n)$ ***paran broj, ako su m i n prirodni brojevi.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Prirodni brojevi dijele se na parne i neparne brojeve. Parni brojevi su oni brojevi koji su djeljivi sa 2, a neparni su oni koji nisu djeljivi sa 2.

▶

1.slučaj

Neka je barem jedan od brojeva m i n paran. Tada je $m \cdot n \cdot (m+n)$ paran broj.

(Umnožak je paran broj, ako je barem jedan od faktora paran broj.)

2.slučaj

Neka su oba broja m i n neparna. Tada je njihov zbroj m + n paran broj pa je $m \cdot n \cdot (m+n)$ paran broj.

(Zbroj dva neparna broja je paran broj.) ■

Dokaz 268

Dokažite između n + 1 prirodnih brojeva mogu se odrediti dva čija je razlika djeljiva sa n.

Teorija

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Za cijeli broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a = b \cdot q + r \ \text{ i } \ 0 \le r < b, \ q \ \text{je količnik}, \ r \ \text{je ostatak}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Kada dijelimo brojem n ostatak može biti broj: 0, 1, 2, 3, … , n – 2 ili n – 1. Dakle, ukupno n brojeva. Od n + 1 prirodnih brojeva najmanje dva pri dijeljenju sa n moraju imati jednake ostatke. Razlika takva dva broja djeljiva je brojem n.

$$\left.\begin{array}{l} a = n \cdot q_1 + r \\ b = n \cdot q_2 + r \end{array}\right\} \Rightarrow a - b = n \cdot q_1 + r - (n \cdot q_2 + r) \Rightarrow a - b = n \cdot q_1 + r - n \cdot q_2 - r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a - b = n \cdot q_1 + r - n \cdot q_2 - r \Rightarrow a - b = n \cdot q_1 - n \cdot q_2 \Rightarrow a - b = n \cdot (q_1 - q_2). \ ■$$

Dokaz 269

Dokaži nejednakost: $2\cdot\sqrt{n+1}-2\cdot\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ n\in N.$

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots\ ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad ,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1}\quad ,\quad \frac{n}{1}=n.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad ,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad ,\quad a=\left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a>b>0\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

▶

$$2\cdot\sqrt{n+1}-2\cdot\sqrt{n}=2\cdot\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\left[\begin{matrix}\text{proširenje}\\ \text{razlomka}\end{matrix}\right]=2\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=2\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-\left(\sqrt{n}\right)^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2\cdot\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=2\cdot\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{n}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.\ \blacksquare$$

Dokaz 270

Dokaži nejednakost: $2\cdot\sqrt{n}-2\cdot\sqrt{n-1}>\frac{1}{\sqrt{n}}\ ,\ n\in N.$

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c\quad,\quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Proširiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka pomnožiti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot n}{b\cdot n}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a\cdot n}{b\cdot n}=\frac{a}{b}\ ,\ n\neq 0\ ,\ n\neq 1.$$

Svaki cijeli broj je racionalan broj:

$$n=\frac{n}{1}\quad,\quad\frac{n}{1}=n.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Drugi korijen pozitivnog broja a je pozitivni broj koji pomnožen sam sa sobom daje broj a. Vrijedi:

$$\left(\sqrt{a}\right)^2=a\quad,\quad a=\left(\sqrt{a}\right)^2.$$

Množenje razlomaka:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a>b>0\ \Rightarrow\ \frac{1}{a}<\frac{1}{b}.$$

▶

$$2\cdot\sqrt{n}-2\cdot\sqrt{n-1}=2\cdot\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)=\left[\begin{array}{c}\text{proširenje}\\ \text{razlomka}\end{array}\right]=2\cdot\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}}{1}\cdot\frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=2\cdot\frac{\left(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\right)\cdot\left(\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\cdot\frac{\left(\sqrt{n}\right)^2-\left(\sqrt{n-1}\right)^2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\cdot\frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\cdot\frac{n-n+1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=2\cdot\frac{n-n+1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{n}}=\frac{2}{2\cdot\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.\ ■$$

Dokaz 271

Dokaži djeljivost broja $35^3 + 25^3$ sa 300.

Teorija

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zbroj kubova:

$$a^3 + b^3 = (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a+b) \cdot \left(a^2 - a \cdot b + b^2\right) = a^3 + b^3.$$

Prirodni je broj djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5.

▶

$$35^3 + 25^3 = (35+25) \cdot \left(35^2 - 35 \cdot 25 + 25^2\right) = 60 \cdot 975 = 60 \cdot 5 \cdot 195 = 300 \cdot 195. \ ■$$

Dokaz 272

Dokaži djeljivost broja $34^3 + 66^3$ sa 400.

Teorija

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zbroj kubova:

$$a^3 + b^3 = (a+b)\cdot\left(a^2 - a\cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a+b)\cdot\left(a^2 - a\cdot b + b^2\right) = a^3 + b^3.$$

Prirodni je broj djeljiv s 4 ako mu je dvoznamenkasti završetak djeljiv s 4.

▶

$$34^3 + 66^3 = (34+66)\cdot\left(34^2 - 34\cdot 66 + 66^2\right) = 100\cdot 3268 = 100\cdot 4\cdot 817 = 400\cdot 817. \ \blacksquare$$

Dokaz 273

Dokaži da je razlika dva broja koji se zapisuju jednakim znamenkama djeljiva brojem 9.

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

Za cijeli broj a i cijeli broj b postoje jedinstveni cijeli brojevi q i r takvi da je

$$a=b\cdot q+r \ \text{ i } \ 0\le r<b, \ q \ \text{ je količnik}, \ r \ \text{ je ostatak}.$$

Prirodni je broj djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenaka djeljiv s 9.

▶

Budući da se oba broja zapisuju jednakim znamenkama, zbroj znamenki je jednak i pri dijeljenju s 9 daju jednake ostatke. Zato se mogu zapisati u obliku:

$$a=9\cdot q_1+r \quad , \quad b=9\cdot q_2+r.$$

Sada je:

$$a-b=9\cdot q_1+r-(9\cdot q_2+r) \Rightarrow a-b=9\cdot q_1+r-9\cdot q_2-r \Rightarrow a-b=9\cdot q_1+r-9\cdot q_2-r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a-b=9\cdot q_1-9\cdot q_2 \Rightarrow a-b=9\cdot(q_1-q_2).$$ ■

Dokaz 274

Dokaži da je $(g \circ f)(x)$ ***linearna funkcija, ako su*** $f(x) = a \cdot x$ i $g(x) = b \cdot x$ ***dvije linearne funkcije s parametrima a, odnosno b.***

Teorija

Umnožak se ne mijenja združimo li faktore na bilo koji način:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

Funkcija $f : R \to R$ dana pravilom $f(x) = a \cdot x, \; a \in R \setminus \{0\}$ naziva se linearna funkcija.

Neka su A, B i C neprazni skupovi, $f : A \to B$ i $g : B \to C$ dvije funkcije. Svakom $a \in A$ pridružen je element $b = f(a) \in B$ i svakom $b \in B$ pridružen je element $c = g(b) \in C$.

Tako je svakom $a \in A$ pridružen potpuno određen element $c \in C$, odnosno definirana je funkcija sa A u C. Ta funkcija zove se kompozicija funkcija f i g i označava se sa g ∘ f. Dakle,

$(g \circ f)(a) = g(f(a))$ za sve $a \in A$.

▶

1.inačica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left[f(x) = a \cdot x \right] = g(a \cdot x) = \left[g(x) = b \cdot x \right] = b \cdot (a \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x.$$

Riječ je o linearnoj funkciji parametra a · b. ■

2.inačica

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \left[g(x) = b \cdot x \right] = b \cdot f(x) = \left[f(x) = a \cdot x \right] = b \cdot (a \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x.$$

Riječ je o linearnoj funkciji parametra a · b. ■

Dokaz 275

Dokaži ako se razlomak $\frac{a}{b}$ može skratiti, može se skratiti razlomak $\frac{a-b}{a+b}$.

Teorija

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

Zajednički djelitelj dva prirodna broja je prirodan broj koji dijeli te brojeve.

▶

Ako se razlomak $\frac{a}{b}$ može skratiti znači da brojevi a i b imaju zajednički djelitelj. On je istodobno i djelitelj brojeva a – b i a + b. To znači da se i razlomak $\frac{a-b}{a+b}$ može skratiti. Na primjer, neka je q zajednički djelitelj brojeva a i b. Tada vrijedi:

$$\left.\begin{array}{l} a = m \cdot q \\ b = n \cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = m \cdot q - n \cdot q \\ a + b = m \cdot q + n \cdot q \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a - b = (m - n) \cdot q \\ a + b = (m + n) \cdot q \end{array}\right\}. \ \blacksquare$$

Dokaz 276

Dokaži ako su a i b prirodni brojevi i a > b, onda je $(a+b)^2 < 2^2 \cdot \left(a^2+b^2\right)$.

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2 \geq 0 \ , \ a \in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Svojstvo nejednakosti:

$$a < b \ , \ c \in R \ \Rightarrow \ a + c < b + c.$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

▶

Najprije imamo točnu nejednakost za a > b.

$$0 < (a-b)^2 \ \Rightarrow \ 0 < a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \ \Rightarrow \ 2 \cdot a \cdot b < a^2 + b^2 \ \Rightarrow \ 2 \cdot a \cdot b < a^2 + b^2 \ / + a^2 + b^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 < a^2 + b^2 + a^2 + b^2 \ \Rightarrow \ (a+b)^2 < 2 \cdot a^2 + 2 \cdot b^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a+b)^2 < 2 \cdot \left(a^2 + b^2\right).$$

Budući da je a > b, slijedi:

$$(a+b)^2 < (2 \cdot a)^2 \ \Rightarrow \ (a+b)^2 < 4 \cdot a^2 \ \Rightarrow \ (a+b)^2 < 4 \cdot a^2 + 4 \cdot b^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (a+b)^2 < 4 \cdot \left(a^2 + b^2\right) \ \Rightarrow \ (a+b)^2 < 2^2 \cdot \left(a^2 + b^2\right). \ \blacksquare$$

Dokaz 277

Dokaži za bilo koji broj x > 0 vrijedi nejednakost $x+\frac{1}{x}\ge 2,$ ***pri čemu znak jednakosti vrijedi samo za x = 1.***

Teorija

Kvadrat realnog broja je nenegativan broj.

$$a^2 \ge 0 \ , \ a \in R.$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a-b)^2.$$

Množenje nejednakosti pozitivnim brojem:

$$a \ge b \ , \ c > 0 \ \Rightarrow \ a\cdot c \ge b\cdot c.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad , \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

▶

Za sve realne brojeve x je:

$$(x-1)^2 \ge 0 \ \Rightarrow \ x^2 - 2\cdot x + 1 \ge 0 \ \Rightarrow \ x^2 + 1 \ge 2\cdot x \ \Rightarrow \ x^2 + 1 \ge 2\cdot x \ /\cdot \frac{1}{x} \ \Rightarrow \ x + \frac{1}{x} \ge 2. \ \blacksquare$$

Dokaz 278

Dokaži da za kvadratnu funkciju $f : R \to R,\ f(x) = a \cdot x^2$ ***vrijedi*** $f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = (\alpha + \beta)^2 \cdot f(x)$.

Teorija

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n .$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1 .$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m .$$

▶

$$f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot (\alpha \cdot x + \beta \cdot x)^2 \Rightarrow f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot \left((\alpha \cdot x)^2 + 2 \cdot \alpha \cdot x \cdot \beta \cdot x + (\beta \cdot x)^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot \left(\alpha^2 \cdot x^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta \cdot x^2 + \beta^2 \cdot x^2 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot x^2 \cdot \left(\alpha^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2 \right) \Rightarrow f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = a \cdot x^2 \cdot (\alpha + \beta)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = (\alpha + \beta)^2 \cdot a \cdot x^2 \Rightarrow f(\alpha \cdot x + \beta \cdot x) = (\alpha + \beta)^2 \cdot f(x). \ ■$$

Dokaz 279

Dokaži identitet:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a \cdot d + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + 2 \cdot c \cdot d.$$

Teorija

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2.$$

Množenje zagrada:

$$(a+b) \cdot (c+d) = a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c).$$

▶

$$(a+b+c+d)^2 = ((a+b)+(c+d))^2 = (a+b)^2 + 2 \cdot (a+b) \cdot (c+d) + (c+d)^2 =$$
$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + 2 \cdot (a \cdot c + a \cdot d + b \cdot c + b \cdot d) + c^2 + 2 \cdot c \cdot d + d^2 =$$
$$= a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a \cdot d + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + c^2 + 2 \cdot c \cdot d + d^2 =$$
$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2 \cdot a \cdot b + 2 \cdot a \cdot c + 2 \cdot a \cdot d + 2 \cdot b \cdot c + 2 \cdot b \cdot d + 2 \cdot c \cdot d. \blacksquare$$

Dokaz 280

Dokaži ako su brojevi a i b relativno prosti, onda su i kvadrati tih brojeva a^2 i b^2 također relativno prosti.

Teorija

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodan broj q tako da vrijedi

$$a = b \cdot q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Najveći zajednički djeljitelj ili mjera dva prirodna broja a i b je najveći prirodan broj koji dijeli i a i b te ga označavamo s D(a, b) ili M(a, b). U slučaju kada vrijedi M(a, b) = 1 kažemo da su a i b relativno prosti.

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

▶

Neka su a i b brojevi rastavljeni na svoje proste faktore.

$$a = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n \quad , \quad b = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_m.$$

Budući da je D(a, b) = 1 znači da nijedan od prostih faktora $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nije jednak nijednom od prostih faktora $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_m$. Zaključujemo da ni među faktorima brojeva

$a^2 = (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n)^2 = a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot a_3^2 \cdot \ldots \cdot a_n^2$ i $b^2 = (b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \cdot \ldots \cdot b_m)^2 = b_1^2 \cdot b_2^2 \cdot b_3^2 \cdot \ldots \cdot b_m^2$

nema zajedničkih faktora. Prema tome je D(a^2, b^2) = 1. ■

Dokaz 281

Duljine stranica trokuta su tri uzastopna prirodna broja. Visina spuštena iz vrha na stranicu srednju po veličini dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika jednaka 4. Dokažite!

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Visine su trokuta dužine kojima je jedan kraj vrh trokuta, a drugi sjecište okomice (koja prolazi promatranim vrhom) s pravcem na kojem leži suprotna stranica trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.
Pitagorin poučak
Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.
Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Kvadrat razlike:

$$(a-b)^2 = a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 - 2 \cdot a \cdot b + b^2 = (a-b)^2 .$$

Oduzimanje jednakosti:

$$a = b \text{ i } c = d \;\Rightarrow\; a - c = b - d .$$

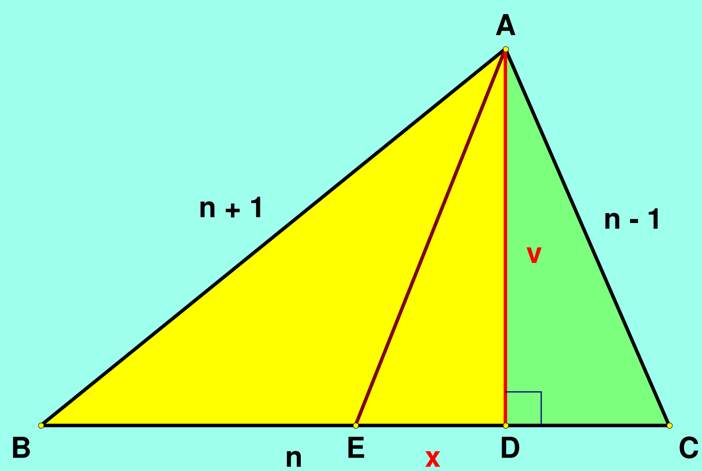
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b+c) .$$

Dijeljenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n : b^n = (a:b)^n \quad , \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad , \quad (a:b)^n = a^n : b^n \quad , \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} .$$

▶



Sa slike vidi se:

$$|AB| = n+1 \;,\; |BC| = n \;,\; |CA| = n-1 \;,\; |AD| = v \;,\; |BE| = |EC| = \frac{n}{2} \;,\; |ED| = x$$

Neka je D nožište visine konstruirane iz vrha A na stranicu $\overline{BC}$, a E polovište te stranice. Označimo $|ED| = x$ pa imamo:

$$|BD| = \frac{n}{2} + x \quad , \quad |CD| = \frac{n}{2} - x .$$

Uočimo pravokutne trokute ΔBDA i ΔDCA i uporabimo Pitagorin poučak:

$$\left.\begin{array}{l} |AB|^2=|AD|^2+|BD|^2 \\ |CA|^2=|AD|^2+|CD|^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (n+1)^2=v^2+\left(\frac{n}{2}+x\right)^2 \\ (n-1)^2=v^2+\left(\frac{n}{2}-x\right)^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} n^2+2\cdot n+1=v^2+\frac{n^2}{4}+n\cdot x+x^2 \\ n^2-2\cdot n+1=v^2+\frac{n^2}{4}-n\cdot x+x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{oduzmemo} \\ \text{jednadžbe} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+2\cdot n+1-\left(n^2-2\cdot n+1\right)=v^2+\frac{n^2}{4}+n\cdot x+x^2-\left(v^2+\frac{n^2}{4}-n\cdot x+x^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+2\cdot n+1-n^2+2\cdot n-1=v^2+\frac{n^2}{4}+n\cdot x+x^2-v^2-\frac{n^2}{4}+n\cdot x-x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2+2\cdot n+1-n^2+2\cdot n-1=v^2+\frac{n^2}{4}+n\cdot x+x^2-v^2-\frac{n^2}{4}+n\cdot x-x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\cdot n+2\cdot n=n\cdot x+n\cdot x \Rightarrow 4\cdot n=2\cdot n\cdot x \Rightarrow 4\cdot n=2\cdot n\cdot x \;/\cdot\frac{1}{2\cdot n} \Rightarrow 2=x \Rightarrow x=2.$$

Konačno slijedi:

$$|BD|-|DC|=\frac{n}{2}+x-\left(\frac{n}{2}-x\right) \Rightarrow |BD|-|DC|=\frac{n}{2}+x-\frac{n}{2}+x \Rightarrow |BD|-|DC|=\frac{n}{2}+x-\frac{n}{2}+x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |BD|-|DC|=2\cdot x \Rightarrow [x=2] \Rightarrow |BD|-|DC|=2\cdot 2 \Rightarrow |BD|-|DC|=4. \blacksquare$$

Dokaz 282

Dokaži ako su a i b cijeli brojevi djeljivi cijelim brojem m (m ≠ 0), onda je s m djeljiv i njihov zbroj a + b.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \quad \text{ili} \quad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zbrajanje jednakosti:

$$a = b \;\; . \;\; c = d \;\Rightarrow\; a + c = b + d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Ako je broj a djeljiv s m, onda postoji cijeli broj q takav da je

$$a = m \cdot q.$$

Ako je broj b djeljiv s m, onda postoji cijeli broj k takav da je

$$b = m \cdot k.$$

Zbrajanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} a = m \cdot q \\ b = m \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{c} \text{zbrojimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow a + b = m \cdot q + m \cdot k \;\Rightarrow\; a + b = m \cdot (q + k).$$

Znači da je a + b djeljiv s m. ■

Dokaz 283

Dokaži ako su a i b cijeli brojevi djeljivi cijelim brojem m (m ≠ 0), onda je s m djeljiva i njihova razlika a – b.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \qquad \text{ili} \qquad a : b = q.$$

Oduzimanje jednakosti:

$$a = b \ \ . \ \ c = d \ \Rightarrow \ a - c = b - d.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad , \qquad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Ako je broj a djeljiv s m, onda postoji cijeli broj q takav da je

$$a = m \cdot q.$$

Ako je broj b djeljiv s m, onda postoji cijeli broj k takav da je

$$b = m \cdot k.$$

Oduzimanjem ovih jednakosti dobivamo:

$$\left. \begin{aligned} a &= m \cdot q \\ b &= m \cdot k \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \text{oduzmemo} \\ \text{jednakosti} \end{bmatrix} \Rightarrow a - b = m \cdot q - m \cdot k \ \Rightarrow \ a - b = m \cdot (q - k).$$

Znači da je a – b djeljiva s m. ■

Dokaz 284

Dokaži ako je cijeli broj a djeljiv s m i cijeli broj b djeljiv s n, onda je umnožak a · b djeljiv s m · n.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{ ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ... \} \qquad \text{ili} \qquad Z = \{ 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ... \}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \qquad \text{ili} \qquad a : b = q.$$

Množenje jednakosti:

$$a = b \;\; . \;\; c = d \;\; \Rightarrow \;\; a \cdot c = b \cdot d.$$

Svojstvo udruživanja (asocijativnosti) za množenje:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot \neq c), \text{ za sve } a, b, c \in R.$$

▶

Ako je broj a djeljiv s m, onda postoji cijeli broj q takav da je

$$a = m \cdot q.$$

Ako je broj b djeljiv s n, onda postoji cijeli broj k takav da je

$$b = n \cdot k.$$

Množenjem ovih jednakosti dobivamo:

$$\left.\begin{array}{l} a = m \cdot q \\ b = n \cdot k \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \text{pomnožimo} \\ \text{jednakosti} \end{array}\right] \Rightarrow a \cdot b = m \cdot q \cdot n \cdot k \;\Rightarrow\; a \cdot b = m \cdot n \cdot (q \cdot k).$$

Znači da je a · b djeljiv s m · n. ■

Dokaz 285

Dokaži ako je cijeli broj a djeljiv s m, onda je i broj a^n djeljiv s brojem m^n, gdje je n bilo koji prirodni broj.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$\ldots, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n.$$

▶

Ako je broj a djeljiv s m, onda postoji cijeli broj q takav da je

$$a = m \cdot q.$$

Sada je:

$$a^n = (m \cdot q)^n \Rightarrow a^n = m^n \cdot q^n.$$

Znači da je a^n djeljivo s m^n. ■

Dokaz 286

Dokaži ako je zbroj nekoliko cijelih brojeva djeljiv s m i ako su svi pribrojnici izuzev jednog jedinog djeljivi s m, onda i taj pribrojnik mora biti djeljiv s m.

Teorija

Cijeli brojevi jesu brojevi:

$$..., -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$$

Oni čine skup cijelih brojeva koji označavamo slovom Z, a zapisujemo kao

$$Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\} \quad \text{ili} \quad Z = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, ...\}.$$

Za cijeli broj a kažemo da je djeljiv s cijelim brojem b (b ≠ 0) ako postoji cijeli broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

Dokažimo tvrdnju, na primjer, za tri pribrojnika.

$$a + b + c = d.$$

Neka su brojevi a, b i d djeljivi brojem m:

$$a = m \cdot q \quad , \quad b = m \cdot k \quad , \quad d = m \cdot r.$$

Odatle slijedi:

$$a + b + c = d \Rightarrow c = d - a - b \Rightarrow c = m \cdot r - m \cdot q - m \cdot k \Rightarrow c = m \cdot (r - q - k).$$

Zaključujemo da je i c djeljiv s m. ■

Dokaz 287

Dokaži da je par brojeva 1755 i 13328 relativno prost.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Najveći zajednički djeljitelj ili mjera dva prirodna broja a i b je najveći prirodan broj koji dijeli i a i b te ga označavamo s D(a, b) ili M(a, b). U slučaju kada vrijedi M(a, b) = 1 kažemo da su a i b relativno prosti.

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8.

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako je paran broj.

Prirodni je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.

Prirodni je broj djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5.

Prirodni je broj djeljiv sa 7 ako mu je razlika zbroja skupina od tri znamenke na neparnim mjestima odnosno na parnim mjestima, idući slijeva na desno, djeljiva sa 7.

▶

Rastavom na proste faktore dobivamo:

$$1755 = 3 \cdot 585 = 3 \cdot 3 \cdot 195 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 65 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13 = 3^3 \cdot 5 \cdot 13.$$

$$13328 = 2 \cdot 6664 = 2 \cdot 2 \cdot 3332 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1666 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 833 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 119 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 17 =$$

$$= 2^4 \cdot 7^2 \cdot 17.$$

Razabiremo da ti brojevi nemaju zajedničkih djelitelja osim broja 1. Dakle, M(1755, 13328) = 1. ■

Dokaz 288

Dokaži da je razlomak $\frac{83790}{887777}$ ***neskrativ.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**
Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.
Najveći zajednički djeljitelj ili mjera dva prirodna broja a i b je najveći prirodan broj koji dijeli i a i b te ga označavamo s D(a, b) ili M(a, b). U slučaju kada vrijedi M(a, b) = 1 kažemo da su a i b relativno prosti.
Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Množenje potencija jednakih baza:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \quad , \quad a^{n+m} = a^n \cdot a^m.$$

Prirodni je broj djeljiv s 2 ako mu je posljednja znamenka 0, 2, 4, 6 ili 8.
Prirodni je broj djeljiv s 2 ako je paran broj.
Prirodni je broj djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.
Prirodni je broj djeljiv s 5 ako mu je posljednja znamenka 0 ili 5.
Prirodni je broj djeljiv sa 7 ako mu je razlika zbroja skupina od tri znamenke na neparnim mjestima odnosno na parnim mjestima, idući slijeva na desno, djeljiva sa 7**.**
Prirodni je broj djeljiv s 11 ako mu je razlika zbroja znamenki na neparnim mjestima odnosno na parnim mjestima, idući zdesna na lijevo, djeljiva s 11.
Skratiti razlomak znači brojnik i nazivnik tog razlomka podijeliti istim brojem različitim od nule i jedinice

$$\frac{a \cdot n}{b \cdot n} = \frac{a}{b} \ , \ n \neq 0 \ , \ n \neq 1.$$

▶

Da se to dokaže treba vidjeti da su brojevi relativno prosti. Rastavom na proste faktore dobivamo:

$$83790 = 2 \cdot 41895 = 2 \cdot 3 \cdot 13965 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4655 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 931 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 133 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 19 =$$

$$= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 19.$$

$$887777 = 11 \cdot 80707 = 11 \cdot 11 \cdot 7337 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 667 = 11 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 23 \cdot 29 = 11^3 \cdot 23 \cdot 29.$$

Razabiremo da ti brojevi nemaju zajedničkih djelitelja osim broja 1 a zbog toga se onda dani razlomak ne može skratiti. ■

Dokaz 289

Dokaži brojevi $\frac{n-5}{5}$ i $\frac{n-4}{35}$ ***ne mogu oba biti istodobno prirodni brojevi ni za koji prirodni broj.***

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Najveći zajednički djeljitelj ili mjera dva prirodna broja a i b je najveći prirodan broj koji dijeli i a i b te ga označavamo s D(a, b) ili M(a, b). U slučaju kada vrijedi M(a, b) = 1 kažemo da su a i b relativno prosti.

▶

Brojevi n – 5 i n – 4 su dva uzastopna prirodna broja pa su relativno prosti. Zato ne mogu istodobno biti djeljivi s 5. ■

Dokaz 290

Dokaži da je razlika troznamenkastog broja i broja zapisanog istim znamenkama ali u obrnutom poretku djeljiva s 99.

Teorija

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = \overline{a_n \, a_{n-1} \, a_{n-2} \ldots a_2 \, a_1 \, a_\circ}$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_\circ.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Za troznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c,$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

▶

$$\overline{abc} - \overline{cba} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - (100 \cdot c + 10 \cdot b + a) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a =$$

$$= 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - 100 \cdot c - 10 \cdot b - a = 100 \cdot a + c - 100 \cdot c - a = 99 \cdot a - 99 \cdot c = 99 \cdot (a - c). \quad ■$$

Dokaz 291

Dokaži da je razlika troznamenkastog broja i zbroja njegovih znamenki djeljiva s 9.

Teorija

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = \overline{a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1\, a_\circ}$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_\circ.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Za troznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abc} = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c,$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

▶

$$\overline{abc} - (a + b + c) = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c = 100 \cdot a + 10 \cdot b + c - a - b - c =$$

$$= 100 \cdot a + 10 \cdot b - a - b = 99 \cdot a + 9 \cdot b = 9 \cdot (11 \cdot a + b). \blacksquare$$

Dokaz 292

Dokaži da je broj oblika $n^4 + n^2 + 1$ složen za $n > 1$.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n\cdot m} \quad , \quad a^{n\cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Kvadrat zbroja:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 \quad , \quad a^2 + 2\cdot a\cdot b + b^2 = (a+b)^2 .$$

Razlika kvadrata:

$$a^2 - b^2 = (a-b)\cdot(a+b) \quad , \quad (a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2 .$$

▶

$$n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2\cdot n^2 + 1 - n^2 = \left(n^2\right)^2 + 2\cdot n^2 + 1 - n^2 = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 =$$

$$= \left(n^2 + 1 - n\right)\cdot\left(n^2 + 1 + n\right) = \left(n^2 - n + 1\right)\cdot\left(n^2 + n + 1\right). \ \blacksquare$$

Dokaz 293

Dokaži izraz $4^8 + 8^4$ djeljiv je sa 17.

Teorija

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots ,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots \right\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Svojstvo potencije:

$$a^1 = a \quad , \quad a = a^1.$$

Dijeljenje potencija jednakih baza:

$$a^n : a^m = a^{n-m}.$$

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

$$4^8 + 8^4 = \left(2^2\right)^8 + \left(2^3\right)^4 = 2^{16} + 2^{12} = 2^{12} \cdot \left(2^4 + 1\right) = 2^{12} \cdot 17 = 17 \cdot 2^{12}. \ \blacksquare$$

Dokaz 294

Dokaži izraz $21^{15} - 1$ djeljiv je s 10.

Teorija

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n = a^{n \cdot m} \quad , \quad a^{n \cdot m} = \left(a^n\right)^m = \left(a^m\right)^n .$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \left\{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots \right\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Razlika kubova:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) \quad , \quad (a-b) \cdot \left(a^2 + a \cdot b + b^2\right) = a^3 - b^3.$$

Za realne brojeve a i b vrijedi jednakost:

$$a^5 - b^5 = (a-b) \cdot \left(a^4 + a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 + b^4\right),$$

$$(a-b) \cdot \left(a^4 + a^3 \cdot b + a^2 \cdot b^2 + a \cdot b^3 + b^4\right) = a^5 - b^5.$$

▶

$$21^{15} - 1 = \left(21^5\right)^3 - 1^3 = \left(21^5 - 1\right) \cdot \left(\left(21^5\right)^2 + 21^5 + 1\right) = \left(21^5 - 1\right) \cdot \left(21^{10} + 21^5 + 1\right) =$$

$$= (21-1) \cdot \left(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1\right) \cdot \left(21^{10} + 21^5 + 1\right) =$$

$$= 20 \cdot \left(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1\right) \cdot \left(21^{10} + 21^5 + 1\right) =$$

$$= 10 \cdot 2 \cdot \left(21^4 + 21^3 + 21^2 + 21 + 1\right) \cdot \left(21^{10} + 21^5 + 1\right). \ ■$$

Dokaz 295

Dokaži izraz 11^{10} – 1 djeljiv je s 10.

Teorija

Potenciranje potencija:

$$\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n=a^{n\cdot m}\quad,\quad a^{n\cdot m}=\left(a^n\right)^m=\left(a^m\right)^n.$$

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N=\left\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \ldots\right\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a=q\cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b}=q\quad \text{ili}\quad a:b=q.$$

Razlika kvadrata:

$$a^2-b^2=(a-b)\cdot(a+b)\quad,\quad (a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2.$$

Za realne brojeve a i b vrijede jednakosti:

$$a^5-b^5=(a-b)\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right),$$

$$(a-b)\cdot\left(a^4+a^3\cdot b+a^2\cdot b^2+a\cdot b^3+b^4\right)=a^5-b^5.$$

$$a^5+b^5=(a+b)\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right),$$

$$(a+b)\cdot\left(a^4-a^3\cdot b+a^2\cdot b^2-a\cdot b^3+b^4\right)=a^5+b^5.$$

Prirodni je broj djeljiv s 10 ako mu je posljednja znamenka 0.

▶

1.inačica

$$11^{10}-1=\left(11^5\right)^2-1^2=\left(11^5-1\right)\cdot\left(11^5+1\right)=$$

$$=(11-1)\cdot\left(11^4+11^3+11^2+11+1\right)\cdot(11+1)\cdot\left(11^4-11^3+11^2-11+1\right)=$$

$$=10\cdot\left(11^4+11^3+11^2+11+1\right)\cdot 12\cdot\left(11^4-11^3+11^2-11+1\right)=$$

$$=10\cdot 12\cdot\left(11^4+11^3+11^2+11+1\right)\cdot\left(11^4-11^3+11^2-11+1\right).\ \blacksquare$$

2.inačica

Broj 11^n uvijek završava znamenkom 1 pa oduzimanjem broja 1 dobije se broj koji završava znamenkom 0, tj. djeljiv je s 10. ■

Dokaz 296

Dokaži za afinu funkciju $f(x) = a \cdot x + b\ (b \neq 0)$ ***vrijedi*** $f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x)$ ***za bilo koji racionalan broj c.***

Teorija

Svojstvo udruživanja (asocijativnosti) za množenje:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \text{ za sve } a,\ b,\ c \in R.$$

Umnožak se ne mijenja ako faktore udružimo na bilo koji način.
Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

$$\left.\begin{array}{l} f(c \cdot x) = a \cdot (c \cdot x) + b \\ c \cdot f(x) = c \cdot (a \cdot x + b) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(c \cdot x) = (a \cdot c) \cdot x + b \\ c \cdot f(x) = c \cdot a \cdot x + c \cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(c \cdot x) = (a \cdot c) \cdot x + b \\ c \cdot f(x) = (a \cdot c) \cdot x + b \cdot c \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c \cdot x) \neq c \cdot f(x). \ \blacksquare$$

Dokaz 297

Dokaži za afinu funkciju $f(x)=a\cdot x+b\ (b\neq 0)$ ***vrijedi*** $f(x_1+x_2)\neq f(x_1)+f(x_2)$ ***za bilo koje racionalne brojeve*** x_1 ***i*** x_2***.***

Teorija

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c \quad , \quad a\cdot b+a\cdot c=a\cdot(b+c).$$

▶

$$\left.\begin{array}{l} f(x_1+x_2)=a\cdot(x_1+x_2)+b \\ f(x_1)+f(x_2)=a\cdot x_1+b+a\cdot x_2+b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f(x_1+x_2)=a\cdot(x_1+x_2)+b \\ f(x_1)+f(x_2)=a\cdot(x_1+x_2)+2\cdot b \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1+x_2)\neq f(x_1)+f(x_2). \ ■$$

Dokaz 298

Dokaži broj oblika $\overline{abab}$ ne može biti potpuni kvadrat.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \dots,\ n-1,\ n,\ n+1,\ \dots\}.$$

Prosti brojevi (prim – brojevi) su prirodni brojevi djeljivi bez ostatka samo s brojem 1 i sami sa sobom, a veći od broja 1. Prirodni brojevi koji su veći od broja 1, a nisu prosti brojevi nazivaju se složenim brojevima. Složen broj je prirodan broj veći od jedan koji je djeljiv brojem 1, samim sobom i barem još jednim brojem. **Svaki se složeni broj može rastaviti na proste faktore.**

Broj 1 nije ni prost, ni složen broj.

Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = \overline{a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2\, a_1\, a_\circ}$, pri čemu je $a_i \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $i = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_\circ.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Za četveroznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d \quad , \quad \overline{abcd} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{cd} \quad , \quad \overline{abcd} = \overline{abc} \cdot 10 + d,$$

gdje je $a \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$, $b,\ c \in \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

$$\overline{abab} = \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot (100 + 1) = 101 \cdot \overline{ab}.$$

Broj 101 je prost, a broj $\overline{ab}$ je dvoznamenkast pa zadani broj ne može biti potpuni kvadrat. ■

Dokaz 299

Dokaži ako je prva znamenka nekog četveroznamenkastog broja jednaka četvrtoj, a druga trećoj, taj broj je djeljiv s 11.

Teorija

Skup prirodnih brojeva označavamo slovom N, a zapisujemo

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}.$$

Za prirodan broj a kažemo da je djeljiv s prirodnim brojem b ako postoji prirodni broj q tako da vrijedi

$$a = q \cdot b.$$

Broj q zovemo količnikom brojeva a i b i pišemo

$$\frac{a}{b} = q \quad \text{ili} \quad a : b = q.$$

Brojevna vrijednost što je nosi neka znamenka određena je ne samo vrijednošću te znamenke već i pozicijom te znamenke u zapisu broja. Takav zapis broja zovemo pozicijskim zapisom. Općenito:

Ako je $N = \overline{a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \ldots a_2\, a_1\, a_\circ}$, pri čemu je $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ dekadski zapis prirodnog broja N, onda je njegova vrijednost

$$N = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + a_{n-2} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_\circ.$$

Broj 10 zove se baza dekadskog brojevnog sustava.

Za četveroznamenkasti prirodni broj vrijedi

$$\overline{abcd} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot c + d,$$

gdje je $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $b, c \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zakon distribucije množenja prema zbrajanju.

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad , \quad a \cdot b + a \cdot c = a \cdot (b + c).$$

▶

$$\overline{abba} = 1000 \cdot a + 100 \cdot b + 10 \cdot b + a = 1001 \cdot a + 110 \cdot b = 11 \cdot (91 \cdot a + 10 \cdot b). \ \blacksquare$$

Dokaz 300

Dokaži ne postoji pravokutan trokut za čije stranice a, b, c vrijedi a : b : c = 1 : 2 : 3.

Teorija

Trokut je dio ravnine omeđen s tri dužine. Te dužine zovemo stranice trokuta.
Pravokutni trokuti imaju jedan pravi kut (kut od 90º). Stranice koje zatvaraju pravi kut zovu se katete, a najdulja stranica je hipotenuza pravokutnog trokuta.

Pitagorin poučak

Trokut ABC je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad hipotenuzom jednak zbroju kvadrata nad katetama.

Množenje potencija jednakih eksponenata:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \quad , \quad (a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n .$$

▶

Dokaz provodimo metodom kontrapozicije. Pretpostavimo da takav pravokutan trokut postoji. Ako za njegove stranice vrijedi a : b : c = 1 : 2 : 3, onda slijedi:

$$a : b : c = 1 : 2 : 3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a = k \\ b = 2 \cdot k \ , \ k \in R \\ c = 3 \cdot k \end{array}\right\}.$$

Za pravokutan trokut vrijedi Pitagorin poučak.

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow k^2 + (2 \cdot k)^2 = (3 \cdot k)^2 \Rightarrow k^2 + 4 \cdot k^2 = 9 \cdot k^2 \Rightarrow 5 \cdot k^2 \neq 9 \cdot k^2 .$$

Jednakost ne vrijedi ni za koji k. Dakle, takav pravokutan trokut ne postoji. ■